OEH
FRANCE
Ecole

OEH
FRANCE
Ecole

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

CINQUANTE-CINQUIÈME CAHIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, N° 55.

1885

Journal de l'École Polytechnique. — 55 Cahiers in-4, avec figures et planches; 1794-1885 .... 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VIIe et VIIIe. Chaque cahier.	8 fr.	» c.	XXXIe. Chaq. cah	9 fr.	» c.
IXe comprenant la Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange	7	»	XXXIIe.	5	»
			XXXIIIe.	9	»
			XXXIVe et XXXVe.	10	»
XIe.	12	»	XXXVIe et XXXVIIe. ...	10	»
XIIe.	12	»	XXXVIIIe et XXXIXe ...	8	»
XIIIe.	8	»	XLe à XLIIIe.	10	»
XIVe	10	»	XLIVe à XLVIIIe.	12	»
XVIe et XVIIe.	8	»	XLIXe.	12	»
XXIe et XXIIe.	8	»	Le	12	»
XXIIIe.	6	»	LIe.	12	»
XXIVe.	7	»	LIIe.	12	»
XXVe et XXVIe.	8	»	LIIIe.	12	»
XXVIIe.	9	»	LIVe.	12	»
XXVIIIe.	7	»	LVe.	14	»
XXIXe et XXXe	5	»			

Journal de l'École Polytechnique. — Table des Matières contenues dans les 37 premiers cahiers, formant 21 volumes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4 .... 2 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Élèves admis en 1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. Marielle. Vol. in-8. 5 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au *Répertoire de M. Marielle;* par M. Le Prieur, Trésorier de l'École. Vol. in-8 .... 3 fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES OSCILLATIONS A LONGUES PÉRIODES

DANS LES MACHINES ACTIONNÉES PAR DES MOTEURS HYDRAULIQUES

ET SUR

LES MOYENS DE PRÉVENIR CES OSCILLATIONS;

PAR M. H. LÉAUTÉ.

(L'Académie des Sciences, sur le Rapport de MM. Phillips, Resal et Tresca, a voté, dans sa séance du 9 mars 1885, l'insertion de ce Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers*.)

Une des difficultés les plus graves que l'on rencontre dans la réglementation des machines, et l'une de celles auxquelles il est le plus malaisé de porter remède, consiste dans les oscillations continues de la vitesse que les praticiens appellent *oscillations à longues périodes* (¹).

Dues aux variations brusques du travail résistant, elles sont susceptibles de se produire chaque fois que ce travail éprouve une modification rapide, et l'on est ainsi exposé à les voir naître au moment du débrayage et de l'embrayage d'un certain nombre d'outils.

(¹) *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. Rolland, *Sur l'établissement des régulateurs de la vitesse* (*Journal de l'École Polytechnique,* XLIIIᵉ Cahier, p. 30, 31, 32 et 33; 1870).

La fréquence des cas où ces oscillations peuvent apparaître, les inconvénients toujours sérieux qu'elles entraînent en détruisant toute constance dans le mouvement, le peu de moyens dont on dispose pour en atténuer les effets, montrent quelle est l'importance de cette question et quel intérêt pratique elle présente.

Cependant bien peu de travaux ont été faits sur ce sujet, et, comme le disait M. Rolland à l'Académie, le 20 mai 1867, en publiant les premières considérations sur cet important problème, les constructeurs en sont encore réduits aujourd'hui « à combattre ces oscillations sans bien se rendre compte des causes qui les produisent ».

Les seules données théoriques que l'on possède sur la question sont contenues dans des Mémoires de M. Rolland et de M. Resal (1); mais ces deux savants n'ont abordé que le cas des machines à vapeur, où le régulateur agit directement sur l'admission.

M. Rolland, dans son travail sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, a rattaché la production des oscillations à longues périodes à l'influence qu'exerce l'inertie des boules sur le mouvement du régulateur, lorsque, par une variation brusque de la résistance, cet appareil passe rapidement d'une position à une autre. Il a conclu, de l'étude qu'il a poursuivie et de la discussion à laquelle il s'est livré, qu'il faut diminuer l'importance du moment d'inertie des boules et non accroître les résistances passives, comme on le fait d'ordinaire. Il a fait connaître enfin un dispositif où ce moment d'inertie est réduit au minimum et qui, dès lors, d'après la théorie exposée et dans les circonstances spéciales étudiées, « donne, dans les limites du possible, une solution complète du problème de l'établissement des régulateurs à force centrifuge (2) ».

M. Resal, de son côté, a fait connaître dans son *Traité de Mécanique générale* (3) l'équation du mouvement d'une machine quand la résistance varie et, tenant compte de l'inertie des diverses pièces, il a montré que

---

(1) M. Marcel Deprez a indiqué en 1876, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, une solution pratique et très ingénieuse du problème; nous y reviendrons plus loin (Chap. IV, n° 3).

(2) *Loc. cit.*, p. 53.

(3) Tome III, p. 218.

cette équation pouvait être ramenée à une équation différentielle du premier ordre, dont il a indiqué l'intégrale générale [1].

Mais, dans ces diverses séries de travaux, les auteurs ont toujours supposé que l'ouverture de la vanne ou, plus exactement, la quantité du travail moteur dépensée, était déterminée uniquement par la position des boules.

Or cette hypothèse, généralement vraie pour les moteurs à vapeur, où l'admission est commandée en général directement par le régulateur, de telle sorte que la position seule des boules suffit à la fixer, ne s'applique plus aux machines hydrauliques où l'appareil centrifuge et le vannage, séparés par un mécanisme intermédiaire devenu indispensable, n'ont plus qu'une connexion indirecte [2]. Les résultats précédemment rappelés ne peuvent pas dès lors s'appliquer, et la question reste entière pour tous les moteurs dont il s'agit.

Dans ces sortes de machines, en effet, la manœuvre de la vanne exige presque toujours un effort considérable que l'on ne pourrait plus demander au régulateur, sans donner à celui-ci des dimensions inadmissibles. C'est la machine elle-même qui fournit la force nécessaire, grâce à un mécanisme spécial de commande du vannage, que le régulateur a seulement pour but d'embrayer au moment opportun.

L'ouverture de la vanne d'admission ne dépend plus ainsi uniquement de la position des boules, mais surtout de la durée de l'embrayage, et « les amplitudes du mouvement de la vanne n'ont qu'une dépendance fort indirecte avec la cause qui fait varier la vitesse de la machine et qui consiste

---

[1] Nous devons mentionner aussi un travail de M. Worms de Romilly, ingénieur des Mines, sur divers systèmes de régulateurs à force centrifuge, travail publié dans les *Annales des Mines,* en 1872, et où se trouve donnée l'équation du mouvement de la machine pendant le fonctionnement du régulateur. M. Worms de Romilly a négligé le frottement dans l'étude des oscillations, mais il a reconnu et signalé son importance (p. 22 du Mémoire). Enfin, M. Wischnegradski (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 31 juillet 1876, p. 318) a étudié spécialement le cas des régulateurs isochrones et a montré qu'ils ne pouvaient bien fonctionner, car, lorsque leur équilibre est rompu, ils font des oscillations dont les amplitudes théoriques croissent indéfiniment avec le temps.

[2] Il existe également un assez grand nombre de machines à vapeur où le régulateur n'agit pas d'une façon absolument directe sur l'admission. On peut citer, en particulier, le compensateur Denis, qui est un véritable appareil à connexion indirecte.

évidemment dans la variation même des résistances qui lui sont appliquées ([1]) ».

Le problème a donc complètement changé de nature, les oscillations des boules, dues à leur inertie, n'ont plus qu'un intérêt tout à fait secondaire, et c'est le mouvement même de la machine qu'il convient d'étudier.

Il faut d'ailleurs remarquer que, dans les appareils à connexion indirecte, l'action du régulateur est forcément beaucoup plus lente, et que, ainsi, les irrégularités de la résistance acquièrent une plus grande importance.

C'est là un motif pour examiner de plus près le phénomène, afin d'en mieux saisir le mécanisme, d'en fixer les causes et de chercher les moyens d'y remédier.

Cet étude fait l'objet du présent Mémoire.

Ce travail est divisé en sept Chapitres, dont l'énumération fera bien comprendre la méthode suivie dans ces recherches.

Chapitre I. — Analyse du phénomène. — Description du cycle. — Le problème revient à l'étude des cycles. — Éléments des cycles qu'il convient de considérer.

Chapitre II. — Détermination mathématique du cycle. — Équation des courbes de déplacement. — Leur réduction à une parabole.

Chapitre III. — Calcul des éléments de chaque portion du cycle. — Périodes d'immobilité de la vanne. — Période de fermeture. — Période d'ouverture.

Chapitre IV. — Discussion du problème. — Étude des cycles successifs. — Oscillations à longues périodes. — Condition pour qu'elles ne se produisent pas.

Chapitre V. — Conséquences pratiques. — Application aux régula-

---

([1]) Poncelet, *Cours de Mécanique appliquée aux machines*, p. 109.

CHAPITRE I.

ANALYSE DU PHÉNOMÈNE. — DESCRIPTION DU CYCLE. — LE PROBLÈME REVIENT A L'ÉTUDE DES CYCLES. — ÉLÉMENTS DES CYCLES QU'IL CONVIENT DE CONSIDÉRER.

Avant d'aborder l'étude analytique de la question, il est indispensable d'examiner, point par point, la manière d'être d'une machine pourvue d'un régulateur, afin de se faire une idée claire des phénomènes successifs, de leur marche générale et de leur importance relative. Le problème que nous allons traiter est, en effet, exclusivement pratique et l'on serait exposé à des erreurs considérables, aussi bien qu'à d'insurmontables difficultés, si l'on appliquait le calcul sans posséder le sens mécanique exact des éléments qui doivent y figurer.

Un régulateur étant placé sur une machine, la manière dont il se comporte, la régularisation qu'il fournit, les oscillations qu'il permet, dépendent à la fois de lui-même et de la machine. Il convient, dès lors, d'étudier successivement : 1° le régulateur seul; 2° la machine seule; 3° la machine munie du régulateur. C'est la marche que nous allons suivre.

I. — Étude du régulateur, abstraction faite de la machine.

Considérons un appareil à boules d'un système quelconque ([1]), abstraction faite du mécanisme de commande du vannage; si l'on y suppose les frottements nuls, l'appareil ne peut être en équilibre dans une position donnée que pour une seule vitesse et, par suite, à chaque hauteur du manchon correspond une vitesse et une seule.

Mais, si l'on tient compte des frottements, comme cela est indispensable, ainsi que nous le montrerons plus loin, la position du manchon ne détermine plus la vitesse de l'arbre du régulateur; elle en fixe seulement deux limites : l'une, supérieure, pour laquelle le manchon est sur le point de monter, par exemple; l'autre, inférieure, pour laquelle il est prêt à descendre.

Ces deux vitesses comprennent évidemment celle qui maintiendrait l'appareil en équilibre dans la position donnée, si le frottement n'existait pas, et l'on voit bien que, pour toute vitesse intermédiaire à ces deux limites, le manchon ne changera pas de hauteur.

Il résulte de là que, lorsqu'on considère un appareil à boules en mouvement assez lent pour qu'il soit permis de négliger les forces d'inertie résultant du mouvement de montée ou de descente des boules, le manchon ne peut passer par la même position, lorsqu'il monte et lorsqu'il descend, que pour des vitesses différentes de la machine. C'est là un point fondamental à remarquer; on doit toujours avoir égard au sens du mouvement, c'est-à-dire spécifier si les boules s'abaissent ou s'élèvent, quand on veut connaître la vitesse qui correspond à une position donnée du régulateur.

([1]) Nous n'examinons, ainsi que nous l'avons dit, que les régulateurs *à action indirecte*, c'est-à-dire pour lesquels la force nécessaire à la manœuvre de la vanne est fournie par la machine elle-même. Ces appareils présentent ce caractère distinctif que les embrayages de fermeture et d'ouverture se produisent pour des positions différentes et déterminées des boules, de sorte que, sauf le cas du régulateur isochrone, il existe toujours une certaine zone de vitesses pour laquelle la vanne reste immobile.

Les régulateurs dans lesquels tout mouvement des boules correspond à un déplacement de la vanne seront désignés sous le nom de régulateurs à *action directe;* ce sont les plus habituellement employés dans les machines à vapeur.

Cela posé, désignons par V la vitesse d'équilibre correspondant, si les frottements étaient nuls, à l'embrayage ou au débrayage de la fermeture de la vanne; nous savons, par ce qui précède, que l'embrayage se produira réellement pour une vitesse V_1 plus grande que V et le débrayage pour une vitesse V_2 inférieure à V.

Pour la même raison, si l'on représente par v la vitesse théorique correspondant à l'ouverture de la vanne, cette ouverture ne commencera à se produire que pour une vitesse v_2 inférieure à v et, une fois commencée, elle ne cessera que pour une vitesse v_1 plus grande que v.

Nous pouvons, dès lors, représenter les grandeurs relatives des diverses vitesses, considérées par le diagramme de la *fig.* 1; la zone $v_1 v_2$ peut, d'ailleurs, empiéter sur la zone $V_1 V_2$, comme le représente la *fig.* 2.

Fig. 1.

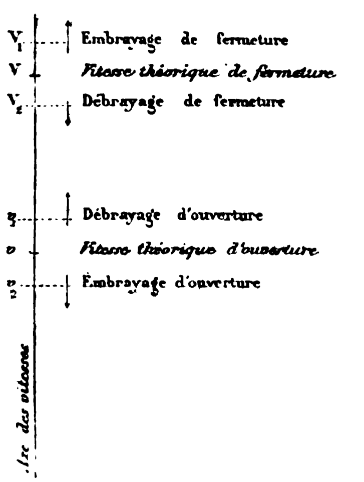
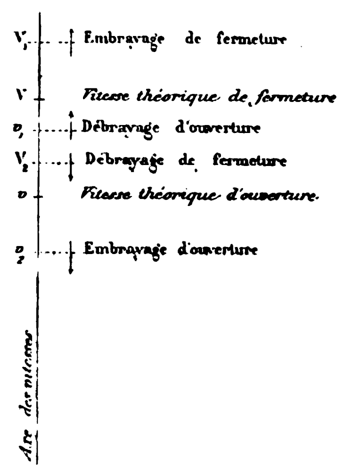


Fig. 2.



Les flèches placées dans les deux figures précédentes, en regard des vitesses, indiquent le sens du mouvement du manchon correspondant à chacune de ces vitesses [1].

---

[1] Il faut observer que les vitesses théoriques d'équilibre V et v seront toujours respectivement comprises dans les intervalles $V_1 V_2$ et $v_1 v_2$.

Remarquons, en effet, que les résistances auxquelles sont dues les différences de vitesses $v_1 - v_2$ et $V_1 - V_2$ sont de deux sortes : d'abord les frottements proprement dits, dus au jeu

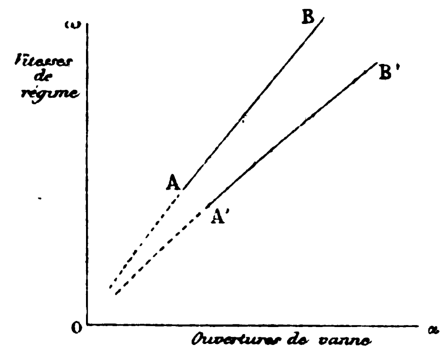
2. — ÉTUDE DE LA MARCHE DE LA MACHINE, ABSTRACTION FAITE DU RÉGULATEUR.

Si pour un genre de travail déterminé, c'est-à-dire pour des conditions données de résistance, la machine étant arrivée à sa vitesse de régime, on ouvre un peu plus la vanne, le mouvement s'accélère; mais c'est un fait d'expérience journalière qu'une nouvelle vitesse de régime, supérieure à la première, est bientôt atteinte.

Si, au contraire, la résistance restant toujours la même, on diminue l'ouverture de la vanne, la nouvelle vitesse de régime réalisée par la machine est inférieure à celle qu'elle possédait auparavant.

Il résulte de là que, pour un travail de grandeur fixe à effectuer ou plutôt pour une résistance donnée à vaincre, si l'on prend pour abscisses les ouvertures de vanne et pour ordonnées les vitesses de régime corres-

Fig. 3.



pondantes, on obtient une courbe telle que AB (*fig.* 3) dont les ordonnées croissent régulièrement avec les abscisses.

---

même de l'appareil à boules; ensuite les résistances, également dues d'ailleurs au frottement qui résulte de l'embrayage et du débrayage de l'appareil de commande du vannage.

Les premières sont entièrement indépendantes du sens du mouvement, c'est-à-dire qu'elles conservent la même valeur absolue dans les deux cas.

Pour les secondes, il n'en est pas de même, en raison des pressions ou des efforts particuliers plus grands qui se développent à la suite de l'embrayage.

D'autre part, la vitesse ne s'annulant guère que lorsque la vanne est complètement fermée, cette courbe passera par l'origine, ou du moins, à cause des frottements, coupera l'axe des α à une très faible distance de cette origine.

Nous désignerons la courbe AB sous le nom de *ligne de régime* correspondant à une résistance donnée.

Lorsque la résistance augmente, la ligne de régime varie, et sa nouvelle position A'B' est située, comme l'indique la figure, au-dessous de l'ancienne AB; il est bien clair, en effet, que, pour une vitesse donnée, la résistance s'étant accrue, l'équilibre entre la puissance et la résistance exige une ouverture de vanne plus forte.

Si, au contraire, la résistance diminue, la ligne de régime s'élève au-dessus de AB.

On peut même remarquer que toutes les lignes de régime relatives aux diverses valeurs de la résistance ne sauraient jamais avoir un point commun; car il n'y a évidemment, pour une résistance et une ouverture de vanne données, qu'une seule vitesse de régime.

Nous ajouterons enfin, et cette remarque aura une importance capitale dans la suite de ce travail, que, pour une grandeur fixe de travail résistant, le maximum de rendement de la machine correspond au point de contact de la tangente menée, par l'origine, à la ligne de régime relative à cette résistance, c'est-à-dire est donné par l'état de régime que définissent la vitesse et l'ouverture de vanne coordonnées de ce point de contact. Cette propriété sera établie plus loin [1].

III. — ÉTUDE DE LA MARCHE DE LA MACHINE POURVUE D'UN RÉGULATEUR, QUAND SURVIENT UNE PERTURBATION.

On peut aisément, par un tracé graphique des plus simples, mettre en évidence les états successifs de la machine après une perturbation et l'influence qu'exerce le régulateur.

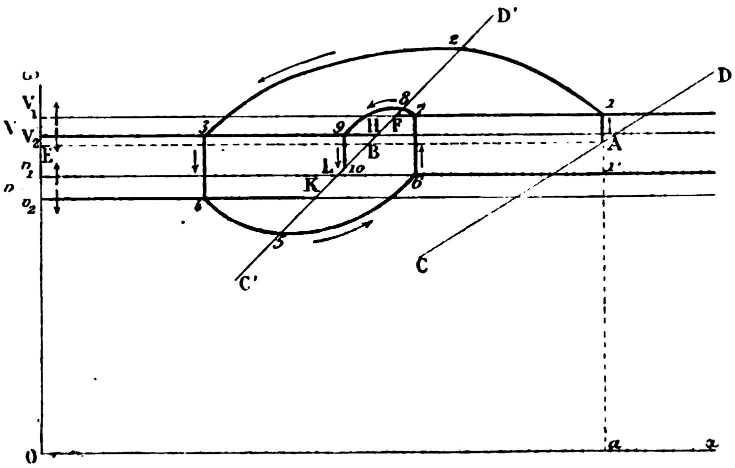
---

[1] Chap. II, n° 8.

Supposons, pour cela, que l'appareil à boules remplisse, par exemple, les conditions données par la *fig.* 1, conditions qui sont d'ailleurs celles de presque tous les régulateurs de la pratique.

Imaginons, d'autre part, que la machine soit arrivée, avant la perturbation, à un état d'équilibre donné par le point A (*fig.* 4), de telle sorte

Fig. 4.



que, avec le système d'axes choisis, la vitesse de régime est l'ordonnée de ce point et l'ouverture de vanne l'abscisse correspondante. La ligne de régime, relative à la valeur considérée de la résistance, est alors représentée par un arc CD passant en A.

Si, à ce moment, la résistance vient brusquement à diminuer par exemple, la ligne de régime correspondant au nouvel état de la machine devient une nouvelle ligne C′D′ qui, suivant la remarque faite, est située au-dessus de CD; la vitesse s'accélère, et, tant qu'elle n'a pas atteint la vitesse V_1 d'embrayage de fermeture, l'ouverture de vanne reste constante; l'état de la machine est donc représenté pendant cette période par la verticale A 1.

Nous désignerons cette période sous le nom de *période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante.*

Lorsque la verticale du point A rencontre la nouvelle ligne de régime C′D′en un point, situé au-dessous de l'horizontale V_1 d'embrayage

de fermeture, la vitesse passe, en ce point de rencontre, par la valeur correspondant à l'état de régime pour l'ouverture de vanne considérée; l'équilibre entre la puissance et la résistance est réalisé à cet instant, et, comme la vanne est et reste forcément immobile, cet équilibre subsiste.

Mais, lorsque la verticale du point A coupe l'horizontale V_1 avant de rencontrer la ligne de régime, l'équilibre n'est plus possible à aucun moment de la période A 1 et l'embrayage de fermeture entre en jeu à partir du point 1.

On voit immédiatement que l'effet de la première période A 1 est toujours de conduire la machine à un état représenté par le point 1, plus rapproché que le point A de la ligne de régime qui est le but à atteindre; nous exprimerons cette propriété, en disant que la période A 1 a toujours un *effet utile*.

Cette notion de l'effet utile, fondamentale dans l'étude que nous allons faire, se comprend bien par ce qui précède; mais, comme les distances des extrémités d'une période à la ligne de régime peuvent être comptées d'une infinité de manières, il est indispensable, pour la clarté de ce qui va suivre, de définir dès maintenant, d'une façon précise, ce que nous entendons par *effet utile* ou *rapprochement*.

Considérons le point A représentant l'état de la machine, avant la diminution subite du travail résistant; l'ouverture de vanne était Oa, ou AE, en désignant ainsi la parallèle à l'axe des α menée par le point A jusqu'à l'axe des ω; si l'on appelle B le point de rencontre de cette parallèle avec la nouvelle ligne de régime C′D′, on voit que AB représente la quantité dont il faudrait fermer la vanne, à l'instant même où le travail résistant diminue, pour que le régulateur restât en équilibre sans modifier sa vitesse; la longueur AB, prise toujours positivement, quelle que soit la position du point A par rapport à la ligne de régime, sera pour nous la distance qui sépare la vanne de sa position d'équilibre, et la différence des distances AB et 1F, correspondant aux deux extrémités de la période, sera le rapprochement relatif à cette période.

Lorsque cette différence sera positive et elle l'est toujours pour A1, il

y aura effet utile; lorsqu'elle sera négative, nous dirons qu'il y a effet nuisible.

Ces définitions établies, nous continuons l'étude des états successifs de la machine.

A partir du point 1, la vitesse continue à croître; mais l'embrayage de fermeture s'étant produit, la vanne commence à s'abaisser : on obtient, dès lors, un arc de courbe 1,2 situé comme l'indique la figure. Cet arc se dirige de droite à gauche et de bas en haut, jusqu'à l'instant où la vitesse atteint son maximum; à ce moment, la tangente à l'arc est horizontale; mais à ce moment aussi, la puissance qui diminue constamment, alors que la résistance reste fixe, est devenue égale à cette dernière, et l'on se trouve, par suite, sur la ligne de régime. Le point de rencontre 2 de l'arc de fermeture 1,2 avec la ligne de régime, correspond donc au maximum de la vitesse, c'est-à-dire que, en ce point 2, la courbe de fermeture a sa tangente horizontale.

Mais l'embrayage de fermeture continue son action, la vanne s'abaisse, la vitesse diminue, et ce n'est qu'au moment où elle devient égale à V_2 que le débrayage se produit et que la vanne cesse son mouvement. Cette seconde portion de la période de fermeture est représentée par l'arc 2,3.

En somme, la période totale de fermeture de la vanne est donnée par la courbe 1, 2, 3 qui, partie de l'horizontale d'embrayage V_1, aboutit à l'horizontale de débrayage V_2, après avoir coupé horizontalement la ligne de régime. La vitesse est arrivée finalement à être à égale V_2, après avoir passé par un maximum supérieur à V_1; quant au rapprochement, il est donné par la différence des distances 1F et 3H prises toujours positivement.

Il n'existe, *a priori*, aucune raison pour que ce rapprochement soit positif plutôt que négatif, et l'effet de la période de fermeture peut être utile ou nuisible suivant les cas.

A cette période succède une période d'immobilité de la vanne dans laquelle la vitesse décroît, puisque la puissance est devenue inférieure à la résistance. Elle est figurée par la verticale 3,4, et l'on reconnaît immédiatement que son effet est toujours utile.

Si cette verticale coupe la ligne de régime au-dessus de l'horizontale d'embrayage v_2, la puissance est égale à la résistance en ce point de rencontre, et la vanne y est au repos ; les oscillations sont terminées, l'équilibre est établi.

Mais si cette condition ne se réalise pas, c'est-à-dire si la verticale descendante 3, 4, coupe l'horizontale v_2, avant d'avoir rencontré la ligne de régime, une période d'ouverture de la vanne commence à partir du point 4 et l'on obtient une courbe 4, 5, 6 qui, tangente à l'horizontale au point 5 d'intersection avec la ligne de régime, se termine en 6, lorsque la vitesse est devenue égale à celle qui correspond au débrayage d'ouverture. Cette période d'ouverture dont le rapprochement est 4K — 6L, peut avoir un effet utile ou un effet nuisible, selon les circonstances.

A cette courbe 4, 5, 6, succède une période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante, qui peut éteindre les oscillations et ainsi de suite.

IV. — Définition du cycle. — Cycle de diverses natures.

Nous appellerons *cycle*, un circuit représentatif formé de quatre périodes : période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante, période de fermeture, période d'immobilité de la vanne à vitesse décroissante, période d'ouverture. Un cycle commencera toujours, pour nous, à l'une des quatre horizontales V_1, V_2, v_1, v_2 et il devra, pour être complet, se terminer à la même horizontale. Ainsi, dans la *fig.* 4, un cycle est représenté par l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

D'après cette définition, le cycle dont l'origine réelle est au point A dans cette figure, sera complet si on le fait partir du point 1', projection de A sur l'horizontale v_1 ; c'est le cycle 1', 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il résulte de ce qui vient d'être dit au paragraphe précédent, qu'un cycle est toujours parcouru dans le même sens, quelle que soit la nature de la perturbation éprouvée par la résistance ; si cette dernière a diminué, en effet, la nouvelle ligne de régime C'D' (*fig.* 4) est au-dessus de l'ancienne CD, la vitesse commence par croître, et la première verticale du cycle A1 correspondant à la période d'immobilité de la vanne à vitesse

croissante, doit être dirigée vers le haut; le sens du parcours est donc alors celui qu'indiquent les flèches de la figure.

Si, au contraire, la résistance a augmenté, la nouvelle ligne de régime est au-dessous de l'ancienne, la vitesse s'abaisse, la première verticale est descendante et le cycle correspondant, parcouru d'abord de A vers 1', est décrit dans le même sens que le précédent.

Lorsque le point terminal d'un cycle est plus rapproché de la ligne de régime que le point initial, le rapprochement étant compté sur l'horizontale commune à ces deux points, le cycle est un *cycle utile;* c'est le cas de la *fig.* 4.

Dans l'hypothèse contraire, on a un *cycle nuisible.*

Enfin, il peut arriver que le point terminal du cycle coïncide avec le point initial et que, dès lors, on soit en présence d'oscillations se reproduisant indéfiniment dans des conditions identiques, c'est le cas du *cycle fermé.*

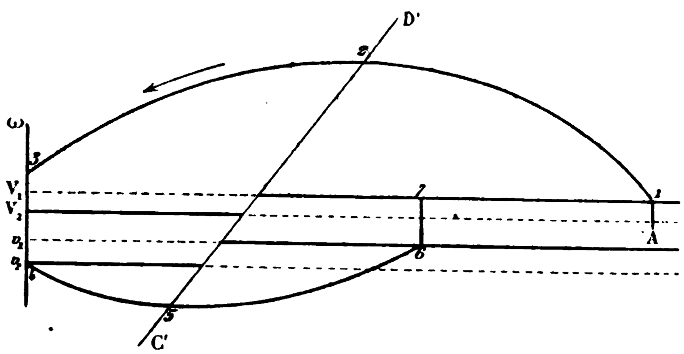
Les trois types de cycle que nous venons d'indiquer supposent essentiellement que, pour la perturbation considérée, le mouvement de la vanne est limité seulement par le régulateur; mais, quand le mécanisme de commande du vannage est très énergique, c'est-à-dire quand la fermeture et l'ouverture de la vanne sont très rapides, et lorsque, d'autre part, la perturbation considérée est suffisamment grande, il peut arriver que l'ouverture complète soit atteinte, ou que la fermeture totale soit réalisée, avant que la vitesse soit arrivée aux valeurs v_1 et V_2 capables de produire les débrayages. On obtient alors des *cycles interrompus.*

Les *fig.* 5 et 6 donnent les diagrammes des deux cas qui correspondent à ces circonstances; le premier n'est susceptible de se produire que pour une diminution brusque du travail résistant, le second, pour une augmentation subite.

Dans la *fig.* 5, la fermeture complète a été atteinte alors que la vitesse n'était pas encore descendue à la valeur qui correspond au débrayage de de fermeture, et l'on a obtenu ainsi une courbe 1, 2, 3, s'arrêtant brusquement en son point de rencontre 3 avec l'axe des ω. A partir de là, la vanne restant complètement fermée, la vitesse s'est abaissée jusqu'au

moment où l'embrayage d'ouverture est entré en jeu, et l'on a eu ainsi, après cette période d'immobilité de la vanne, une courbe 4, 5, 6 dont

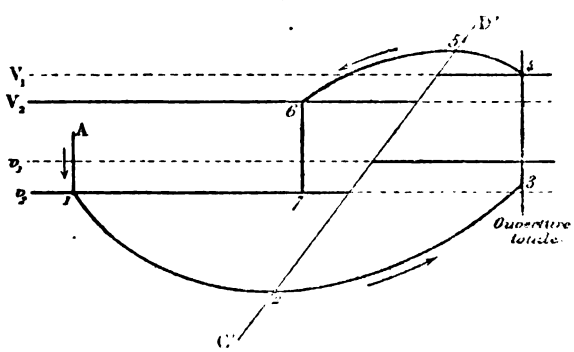
Fig. 5.



le point de départ est précisément au point v_2 de l'axe des ω. Le reste du cycle ne présente plus de particularités.

Dans la *fig.* 6, au contraire, où le travail résistant ayant éprouvé une

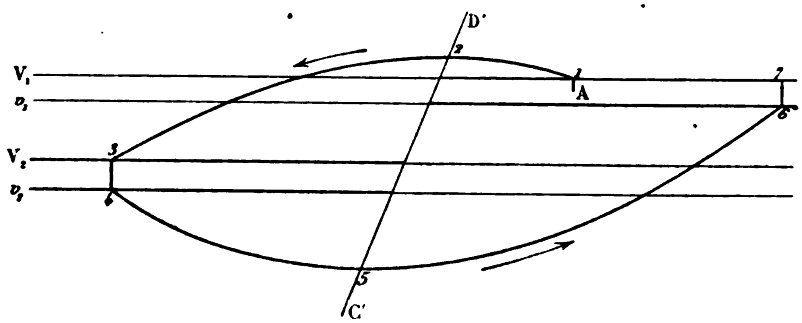
Fig. 6.



augmentation subite, la ligne de régime C′D′ est à droite du point de départ A, l'ouverture complète s'est produite quand la vitesse ayant dépassé son maximum correspondant au point 2 et s'étant mise à croître, n'avait pas encore atteint la vitesse v_1 nécessaire pour le débrayage d'ouverture. Il est bien clair que, dans ce cas, la courbe de fermeture 4, 5, 6, part du point 4, situé sur la verticale d'ouverture complète, au point de rencontre de l'horizontale V_1 correspondant à l'embrayage de fermeture.

Les diverses figures que nous venons de tracer se rapportent au cas d'un régulateur, où les quatre vitesses d'embrayage et de débrayage présentent la disposition relative de la *fig.* 1; c'est d'ailleurs là le cas général de la pratique. Si le régulateur remplit les conditions de la *fig.* 2, le tracé se fait identiquement de la même manière; nous n'y reviendrons donc pas, et il nous suffira de représenter, par la *fig.* 7, le diagramme d'un cycle nuisible.

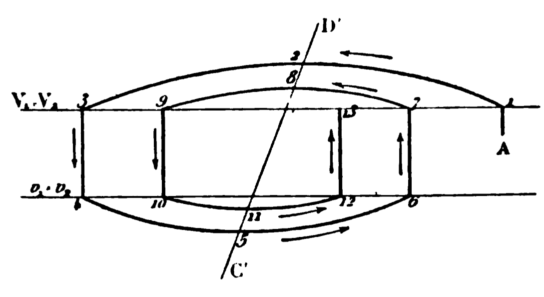
Fig. 7.



Il est un cas théorique particulièrement intéressant, dont il est utile, pour fixer les idées, de dire dès maintenant un mot : c'est celui où les résistances qui s'opposent à l'embrayage et au débrayage sont supposées nulles, aussi bien pour l'ouverture que pour la fermeture.

Dans ce cas, comme le représente la *fig.* 8, les divers arcs de courbe commencent et finissent sur la même horizontale.

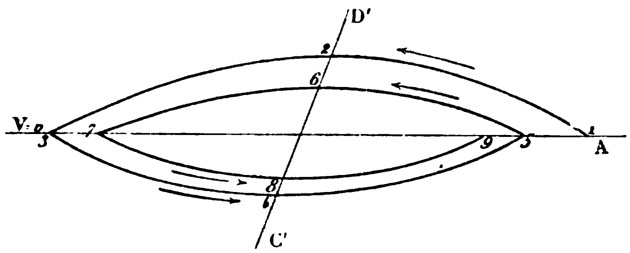
Fig. 8.



Enfin, si l'on suppose le régulateur isochrone, c'est-à-dire si l'on admet que la plus légère variation de vitesse doit produire, abstraction faite des

frottements, un mouvement de la vanne, les vitesses théoriques d'ouverture et de fermeture v et V (*fig.* 1) deviennent forcément égales, et l'on obtient des cycles analogues à ceux de la *fig.* 9.

Fig. 9.



On voit, d'une façon générale, par ce qui précède, que lorsqu'on saura effectuer le tracé des cycles successifs correspondant à une même perturbation, il sera possible ainsi d'avoir une idée claire de la nature des phénomènes qui se produisent, depuis l'instant où la résistance a varié jusqu'à celui où le régime a été rétabli. Nous montrerons, dans la suite de ce travail, que la connaissance de ce tracé suffit pour que le problème de la régularisation du mouvement dans les appareils à action indirecte puisse être traité complètement, et pour que toutes les questions qu'il soulève puissent être pratiquement examinées et résolues.

3. — Remarque sur les différences fondamentales qui existent entre les régulateurs a action indirecte et les régulateurs a action directe.

Le mode de représentation indiqué pour les états successifs d'une machine pourvue d'un régulateur à action indirecte, après une perturbation de la résistance, donne le moyen de reconnaître comment cette machine se comporte sous l'influence de l'appareil de régulation et permet ainsi de bien préciser la différence qui existe entre les régulateurs à action indirecte et les régulateurs à action directe.

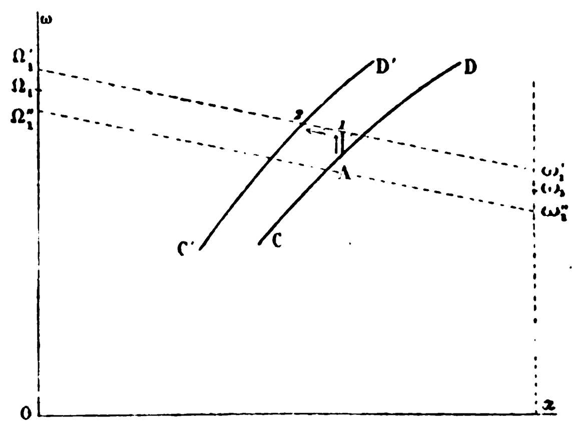
Ces derniers présentent, en effet, des caractères spéciaux, et quoique leur étude n'entre pas directement dans le cadre que nous nous sommes

tracé, il est nécessaire que nous insistions sur ce point, afin de montrer nettement pourquoi l'étude des mécanismes à action indirecte est tout à fait distincte de celle des mécanismes à action directe.

Considérons un appareil de régulation à action directe et appliquons-lui le mode de représentation que nous avons employé.

Pour une valeur donnée du travail résistant, la ligne de régime de la machine, prise indépendamment du régulateur, est CD (*fig.* 10); si ce travail résistant subit une diminution, CD passe en C'D'.

Fig. 10.



Ceci posé, le manchon étant invariablement relié à la vanne ou à la soupape d'admission, et chaque position de ce manchon correspondant à une vitesse particulière (ou plutôt à une zone de vitesses, dont l'étendue dépend de l'intensité des frottements), on voit que chaque vitesse de la machine fixe une certaine ouverture de vanne; cette ouverture, c'est-à-dire cette valeur de α, est absolument déterminée si le manchon est en mouvement et si l'on connaît le sens de ce mouvement; elle est simplement comprise entre deux limites si le régulateur est en repos relatif.

Si donc nous portons sur l'axe des α l'abscisse $O\alpha$, représentant l'ouverture complète de la vanne et que nous marquions, d'une part, sur l'axe des ω, la vitesse Ω_1 produisant, abstraction faite des frottements, la fermeture totale, d'autre part, sur l'ordonnée α, la vitesse théorique ω_1 qui donne lieu à l'ouverture complète, on est certain que la liaison de la vanne et du

régulateur considéré à l'état statique, est représentée, si les résistances passives sont négligées, par une ligne allant de Ω_1 à ω_1.

Il résulte de là qu'en fait, lorsqu'on tient compte des frottements, cette liaison est figurée par deux lignes inclinées $\Omega'_1\,\omega'_1$ et $\Omega''_1\,\omega''_1$, dont la distance verticale est proportionnelle à l'intensité de ces frottements.

Cela établi, imaginons un état d'équilibre de la machine représenté par le point A, et supposons-le brusquement modifié, de façon que la ligne de régime CD correspondant à ce point vienne en C′D′.

La ligne C′D′ étant, par exemple, au-dessus de CD, la résistance est devenue inférieure à la puissance, la vitesse va s'accroître et, comme la vanne est immobile puisque le point A est forcément dans la bande $\Omega'_1\,\Omega''_1\;\omega'_1\,\omega''_1$, l'état de la machine est tout d'abord représenté par la verticale A1.

Cela est exactement conforme à ce qui se passe pour les régulateurs à action indirecte.

Mais, à partir du moment où le point 1 de la ligne $\Omega'_1\,\omega'_1$ est atteint, les phénomènes ne se succèdent plus de la même manière. Si l'on admet que, par suite de la lenteur du mouvement suivant lequel varie l'état de la machine, la position des boules est, à chaque instant, celle qui correspond à la vitesse (ce qui est à peu près réalisé quand on a un frein convenable), on voit que, au delà du point 1, l'ouverture de la vanne étant exactement déterminée par la vitesse, l'état de la machine est représenté par la ligne 1, 2, dirigée suivant $\omega'_1\,\Omega'_1$ et limitée à C′D′.

Le point 2 étant ainsi obtenu et le régulateur, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, y arrivant sans vitesse appréciable, il y a, à cet instant, équilibre entre la puissance et la résistance; le mouvement de la machine cesse de varier et le régime est établi.

Mais dans les circonstances ordinaires de la pratique, les régulateurs à action directe étant des appareils à action rapide, on ne pourra annuler comme nous l'avons fait les oscillations propres du régulateur; celles-ci se transmettront à la vanne, et la position de cette dernière ne sera plus dès lors, à chaque instant, celle qui correspond à la vitesse de la machine.

On voit bien ainsi que s'il n'est pas permis évidemment, dans les appareils à action directe, d'étudier le mouvement du régulateur indépen-

damment de la machine et de négliger ainsi l'inertie des pièces qui la composent, il n'est pas possible non plus, en raison de la rapidité de l'action régulatrice, de laisser de côté le mouvement propre des boules.

Le problème posé est donc tout différent quand il s'agit de l'action directe; tandis que dans les régulateurs à action indirecte, toujours à action lente, les oscillations de l'appareil à boules n'ont qu'une influence des plus faibles, elles interviennent, au contraire, dans les régulateurs à action directe et peuvent jouer un rôle relativement important.

En résumé, les deux appareils que nous comparons présentent deux différences capitales qui sont les suivantes :

1° Pour l'action directe, l'état de la machine est déterminé par la position du manchon; pour l'action indirecte, il dépend du temps, pendant lequel l'embrayage a lieu.

2° Les régulateurs à action directe agissent rapidement, les autres sont à action lente, ce qui oblige à tenir compte, pour les premiers, de l'inertie des boules que l'on peut négliger pour les seconds.

6. — Méthode suivie pour l'étude des oscillations a longues périodes.

La méthode que nous allons suivre pour étudier les oscillations à longues périodes, pour découvrir les circonstances qui les font naître et pour trouver les moyens de les éviter, consiste, en principe, étant donnés un état initial de la machine et une perturbation de la résistance, à tracer les cycles qui vont résulter de cette dernière. Il est clair, en effet, que lorsqu'on pourra, dans une circonstance quelconque, déterminer ces cycles, on saura, par le fait même, si une position finale d'équilibre peut être obtenue, dans quelles conditions elle est atteinte, et qu'on aura ainsi, en même temps qu'une représentation complète du phénomène, la possibilité de connaître les cas où se produisent les oscillations à longues périodes et les causes auxquelles elles sont dues.

La première étude que nous devons faire au début de cette théorie, celle qui, d'après la marche indiquée, doit précéder toutes les autres, est

donc l'étude de la nature du cycle lui-même, c'est-à-dire des courbes d'ouverture et de fermeture qui, avec les verticales correspondant à l'immobilité de la vanne, le constituent. Cette recherche fera l'objet du Chapitre II.

Une fois ces courbes connues, nous serons en mesure, dans le Chapitre III, de calculer la durée, l'écart de vitesse, l'effet utile de chaque portion de cycle, et nous aurons alors tous les éléments pour discuter le problème, dans les Chapitres suivants, et déduire les conséquences pratiques qui résulteront de cette discussion.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION MATHÉMATIQUE DU CYCLE. — ÉQUATION DES COURBES DE DÉPLACEMENT. LEUR RÉDUCTION A UNE PARABOLE.

Avant d'aborder la détermination mathématique des diverses portions du cycle, deux remarques sont indispensables à faire.

Tout d'abord, nous avons supposé dans le Chapitre précédent que les perturbations étaient produites par une variation dans le travail résistant; c'est là le cas ordinaire de la pratique, les perturbations étant généralement dues à l'embrayage ou au débrayage des diverses machines commandées par le moteur. Mais il est bien évident que les mêmes considérations s'appliqueraient au cas d'une variation du travail moteur, car nous n'avons, en somme, à considérer que l'effet final de la perturbation, c'est-à-dire que la disproportion qui en résulte entre la puissance et la résistance.

Pour le même motif, nous n'avons pas à nous préoccuper des phases diverses par lesquelles a passé la cause perturbatrice, et nous pourrons toujours supposer qu'il s'agit d'une variation brusque. Nous ne nous proposons, en effet, que d'étudier les oscillations à longues périodes. Or,

s'il se produit des oscillations indéfinies de la vitesse, elles se continuent après que la cause perturbatrice a cessé d'agir et peu importe alors, au point de vue du phénomène final, la nature primitive de la perturbation. Le premier cycle pourra être très différent, mais les suivants deviendront les mêmes.

Nous ajouterons d'ailleurs qu'une variation lente peut toujours être regardée comme la superposition de petites variations brusques et qu'ainsi il n'y a pas lieu de l'étudier spécialement.

En second lieu, nous supprimerons, dans les calculs que nous allons faire, toute particularité pouvant caractériser un moteur spécial. Ce n'est qu'à cette condition qu'il est possible d'analyser le phénomène, d'en distinguer les causes, d'en trouver les propriétés fondamentales et d'arriver à des conséquences générales.

Cela admis, on sait que les courbes d'ouverture et de fermeture sont déterminées par la relation qui lie l'ouverture de la vanne à la vitesse de la machine, pendant l'embrayage du mécanisme de commande du vannage. Il faut donc, pour construire ces courbes, connaître le mouvement simultané de la machine et de son vannage. Ce sont les équations de ce mouvement que nous allons tout d'abord établir.

1. — Équations du mouvement simultané de la machine et de son vannage.

Considérons une machine complète, formée de la réunion du moteur et de l'outil et supposons-la pourvue d'un appareil de régulation à action indirecte.

Cette machine constitue, comme l'on sait, un système à liaisons complètes, dont le mouvement est déterminé par celui de l'un quelconque de ses points.

Prenons, pour définir ce mouvement, un point relié, soit à l'arbre même du moteur, soit à l'un des arbres de la machine animé d'un mouvement de rotation continu, et désignons par θ le chemin angulaire décrit par ce point, depuis l'époque prise pour origine du temps.

Quelle que soit la position dans laquelle se trouve la machine, les vitesses linéaires de ses différents points, à un moment déterminé, sont toutes proportionnelles à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ du point choisi. Le rapport de proportionnalité varie d'ailleurs d'un point à un autre et peut même différer, pour le même point, selon la position de la machine.

La force vive totale de cette machine a, par suite, pour expression $I\frac{\omega^2}{2}$, I étant une certaine quantité dépendant de la position relative des diverses pièces, mais qui reprend la même valeur quand la machine revient à la même position, c'est-à-dire qui est une fonction périodique de θ.

Il faut d'ailleurs remarquer que les variations périodiques de I, dues aux pièces animées d'un mouvement alternatif ou non uniforme, sont toujours assez restreintes; car, dans tout mécanisme bien construit, l'influence de ces pièces est généralement assez faible ou, du moins, est rendue telle par l'addition d'un volant.

La force vive étant ainsi représentée par la quantité $I\frac{\omega^2}{2}$, dans laquelle I reste compris dans des limites plus ou moins resserrées fixées par le volant, cherchons les expressions du travail résistant ou du travail moteur, afin d'appliquer le théorème des forces vives.

La résistance, due à la fois à l'action utile de l'outil et aux résistances passives engendrées dans le mouvement des divers organes, varie, en général, à chaque instant, suivant la position relative des différentes pièces de la machine; mais, lorsque cette position est supposée donnée, le travail résistant élémentaire en un point d'application d'une quelconque des résistances est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au chemin parcouru par ce point. Et, comme les chemins parcourus dépendent tous uniquement de θ, le travail résistant total, correspondant à la variation $d\theta$, a pour expression $\Psi(\theta)\,d\theta$, $\Psi(\theta)$ étant une quantité qui varie uniquement avec la position de la machine, c'est-à-dire une fonction périodique de θ, fonction qui oscille autour d'une certaine valeur moyenne (¹).

(¹) Les résistances que peut avoir à vaincre une machine varient quelquefois avec la vitesse. La quantité $\Psi(\theta)$ contient alors certains termes dépendant de cette vitesse ω. Mais

Quant au travail moteur que reçoit la machine, il dépend à la fois de la quantité d'eau qui traverse le moteur et du rendement de ce moteur.

La quantité d'eau écoulée doit être regardée comme étant fonction simplement de l'ouverture α' de la vanne. Cela est rigoureusement vrai dans les roues à augets où l'eau n'agit que par son poids; mais ce fait peut encore être admis dans les autres moteurs hydrauliques et même dans les turbines, malgré l'influence exercée par la vitesse de la roue.

Les variations de vitesse que nous avons à étudier sont, en effet, assez faibles, pour qu'il n'y ait pas lieu de tenir compte de cette influence.

Et comme, d'autre part, le coefficient de contraction de l'orifice d'écoulement, pour un même système de vannage, n'est jamais altéré d'une façon sensible par l'ouverture plus ou moins grande de la vanne, on peut regarder le débit comme proportionnel à cette ouverture.

Cela posé, le second élément dont est fonction le travail moteur, c'est le rendement; or ce rendement dépend, comme l'on sait, à la fois de la vitesse et de la quantité d'eau écoulée.

La première de ces quantités ne peut, dans les conditions où nous sommes placé, exercer d'influence sur les phénomènes que nous étudions, et il est permis de laisser de côté les variations de rendement et, par suite, de travail moteur qu'elle produit. D'une part, en effet, la vitesse, comme nous l'avons dit, reste comprise entre des limites assez restreintes; d'autre part, la vitesse de régime, dans toute machine suffisamment bien installée pour comporter l'emploi d'un régulateur, étant toujours voisine de celle qui donne le maximum de rendement, les variations de vitesse n'ont, dans ces conditions, qu'une influence très faible sur le rendement.

La seconde quantité dont dépend ce rendement, c'est-à-dire le volume d'eau écoulé, paraît, au premier abord, devoir exercer une action assez notable.

On sait, en effet, que la force disponible sur l'arbre d'un moteur quelconque est relativement d'autant moins grande que la force dépensée est

---

dans les limites où se meut ω, il est permis de la supposer remplacée par sa valeur moyenne et de réduire ainsi $\Psi(\theta)$, même dans ces cas particuliers, à une fonction de la seule variable θ.

elle-même moins considérable, ce qui correspond à un décroissement rapide du rendement pratique.

Mais ce décroissement provient de ce que la force nécessaire, pour entretenir le mouvement du moteur lui-même, reste sensiblement constante, quand la vitesse varie et acquiert ainsi, par rapport à la force dépensée, lorsque celle-ci diminue, une importance relative plus grande.

Or nous ne devons pas tenir compte ici de la force que nécessite le mouvement du moteur, puisqu'elle est comprise dans l'ensemble des résistances à vaincre.

Le rendement que nous considérons se rapporte uniquement à la réaction de l'eau sur le moteur et, dans les conditions où nous nous plaçons, il peut être considéré comme restant fixe pour une même vitesse. L'eau, en effet, agit sur le moteur, par son poids et par sa vitesse. L'action qu'elle produit par son poids, rapportée à l'unité de poids, dépend de la quantité dont elle s'abaisse pendant qu'elle traverse le moteur, et cette action est évidemment la même, quelle que soit la quantité d'eau, pourvu que le chemin parcouru ne varie pas avec cette quantité, ce qui est le cas général. L'action qu'elle produit par sa vitesse, rapportée toujours à l'unité de poids, dépend des angles sous lesquels les filets liquides frappent le moteur et des résistances dues au frottement. Or les angles d'incidence ne varient pas sensiblement avec la quantité écoulée, et il reste seulement les résistances du frottement. Ces dernières sont généralement moindres avec de grandes quantités d'eau, mais ce ne sont là que des phénomènes accessoires, de faible importance relative et dont l'influence, quoique réelle, n'est jamais très sensible dans les limites où il faut, en somme, se maintenir.

En résumé, la quantité d'eau écoulée étant, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à l'ouverture α de la vanne, le travail moteur utilisé pendant le temps dt a pour expression $\mathrm{M}\alpha\, dt$, où M désigne une quantité qui dépend du rendement et qui peut, comme $\Psi(\theta)$, se trouver une fonction périodique de θ.

Et, comme nous avons vu que le rendement variait fort peu, parce que la vitesse, qui en forme l'élément variable le plus influent, varie elle-même

fort peu et est, de plus, toujours voisine de la valeur correspondant au maximum de rendement, nous pouvons considérer M comme fonction uniquement de θ et le représenter par $\Phi(\theta)$.

Mais, puisque le travail moteur élémentaire $\Phi(\theta)\,\alpha\, dt$, fourni pendant le temps dt, se retrouve dans la force vive acquise par la machine

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\, d\omega$$

et dans le travail résistant $\Psi(\theta)\,d\theta$, on voit finalement que le mouvement de la machine est régi, à un moment quelconque, par les deux équations simultanées

$$I\omega\, d\omega + \Psi(\theta)\,d\theta = \Phi(\theta)\,\alpha\, dt, \tag{1}$$

$$d\theta = \omega\, dt, \tag{2}$$

où les quantités I, $\Psi(\theta)$, $\Phi(\theta)$, qui ont les significations indiquées plus haut, sont des fonctions périodiques de θ.

Cela admis, remarquons que la vitesse ω restant toujours comprise, ainsi que nous l'avons dit, entre des limites relativement peu éloignées, par l'effet même de l'appareil de régulation, si l'on désigne par Ω une des valeurs, quelconque d'ailleurs, qu'elle peut atteindre, et si l'on pose

$$\omega^2 = \Omega^2(1 - 2z),$$

la quantité z sera toujours petite.

On pourra, par suite, négliger, dans cette étude, les puissances de z supérieures à la première et remplacer ω et $\frac{1}{\omega}$ respectivement par

$$\Omega(1 - z) \quad \text{et} \quad \frac{1+z}{\Omega}.$$

Les équations (1) et (2) seront ainsi ramenées à la forme linéaire, comme l'a fait M. Resal [1], et elles deviendront

$$-I\Omega^2 dz + \Psi(\theta)\,d\theta = \Phi(\theta)\,\alpha\, dt, \tag{3}$$

$$d\theta = \Omega(1 - z)\,dt. \tag{4}$$

[1] *Traité de Mécanique générale,* t. III, p. 219.

On en déduit, par l'élimination du temps,

$$(5) \qquad dz = \left[\frac{\Psi(\theta)}{I\Omega^2} - \frac{\Phi(\theta)\alpha}{I\Omega^3}\right]d\theta - \frac{\Phi(\theta)\alpha}{I\Omega^3}z\,d\theta,$$

équation du premier ordre qui suffira pour faire connaître complètement le mouvement de la machine, dès que α sera déterminé.

Cette quantité α qui représente l'ouverture de la vanne est variable ou constante suivant que le régulateur agit ou n'agit pas; dans le premier cas, pour les dispositifs ordinairement employés, elle dépend uniquement du chemin parcouru par la machine depuis le moment où le régulateur est venu mettre en marche l'appareil de commande du vannage; on peut donc regarder α comme étant uniquement fonction de θ, ce qui ramène l'équation (5) à une équation du premier ordre linéaire en z.

L'intégrale générale de cette équation est alors

$$(6) \qquad z = e^{-\int\frac{\Phi(\theta)\alpha\,d\theta}{I\Omega^3}} \int\left[\frac{\Psi(\theta)}{I\Omega^2} - \frac{\Phi(\theta)\alpha}{I\Omega^3}\right] e^{\int\frac{\Phi(\theta)\alpha\,d\theta}{I\Omega^3}}\,d\theta,$$

formule qui correspond à celle donnée par M. Resal, pour le cas des moteurs à vapeur ([1]).

Cette intégrale donne le mouvement de la machine dans toute sa généralité. Par le fait même, elle comprend certaines inégalités de mouve-

---

([1]) M. Resal a établi (*loc. cit.*) que, si l'on étudie le mouvement d'une machine à vapeur, munie d'un régulateur à action directe, depuis le moment où ce régulateur entre en fonction, on a

$$\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{2} = \frac{1}{A} e^{\frac{-2}{A(\omega''^2 - \omega_2^2)^2}\int F(\theta)\,d\theta} \int_{\theta_2}^{\theta} [F(\theta) - \varphi(\theta)]\, e^{\frac{2}{A(\omega''^2 - \omega_2^2)^2}\int F(\theta)\,d\theta}\, d\theta.$$

Dans cette formule, $\int F(\theta)\,d\theta$ représente le travail moteur, ω'' est la valeur de ω pour laquelle la vanne est complètement baissée; on a supposé que la résistance éprouve une variation qui l'amène à la valeur $\int \varphi(\theta)\,d\theta$ et l'on a désigné par ω_2 la valeur de ω correspondant au moment où la vanne est sur le point de se déplacer.

L'analogie de cette formule avec celle que nous avons obtenue est évidente, si l'on remarque que $\omega^2 - \omega_2^2$ n'est autre chose que z, d'après la définition de cette quantité.

Il faut observer d'ailleurs que, de même que nous avons négligé les puissances de z supérieures à la première pour établir la formule (6), M. Resal trouve sa formule en supposant $\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{2}$ assez petit pour qu'on puisse le négliger devant l'unité.

ment que nous n'avons pas à examiner et qui correspondent à de véritables perturbations pour le phénomène que nous avons en vue.

Ces inégalités sont les variations périodiques dues à l'inertie des pièces de la machine ou aux intermittences d'action de la puissance et de la résistance; elles doivent rester en dehors de l'action du régulateur; c'est au volant, et au volant seul, qu'il appartient de les corriger.

Elles sont représentées par la partie périodique des fonctions $\Phi(\theta)$, $\Psi(\theta)$ et I, nous devons donç, pour les éliminer, supprimer cette partie périodique et remplacer ces fonctions par leurs valeurs moyennes Φ_1, Ψ_1, I_1 : c'est ce que nous ferons dans les calculs qui vont suivre.

2. — Équation d'une courbe de fermeture.

Dans les régulateurs à action indirecte, où le déplacement de la vanne est produit par la machine elle-même, le mouvement est transmis au vannage par un arbre qu'actionne la machine, et la communication est établie à l'aide du manchon du régulateur. Que cette communication ait lieu par engrenages, par cônes de friction, par poulies folle et fixes, le chemin parcouru par la vanne est toujours proportionnel à celui décrit par la machine, depuis le début de l'embrayage. Nous devons donc considérer α comme proportionnel au chemin parcouru pendant cette période et écrire

$$d\alpha = -\varepsilon d\theta; \tag{7}$$

ε fixe le rapport des vitesses relatives de la vanne et de la machine; il est d'autant plus grand que le mécanisme de régulation est plus énergique.

Le signe négatif donné au second membre exprime que α et θ varient en sens contraires, c'est-à-dire qu'il s'agit spécialement d'une période de fermeture.

L'équation (7) doit être jointe aux équations fondamentales (3) et (4), qui peuvent s'écrire

$$I\Omega^3 dz = (\Omega\Psi_1 - \alpha\,\Phi_1)\,d\theta - \alpha\,\Phi_1\,z\,d\theta, \tag{8}$$

$$\omega = \Omega(1 - z). \tag{9}$$

Ω n'est assujettie, comme nous l'avons dit, qu'à être l'une des valeurs que prend la vitesse; nous pouvons, dès lors, considérer Ω comme représentant la valeur maxima de ω, pendant la période de fermeture considérée, c'est-à-dire comme étant la vitesse au point 2 (*fig.* 4).

Nous désignerons d'ailleurs par A l'ouverture de vanne correspondant à ce point.

L'équilibre entre la puissance et la résistance étant réalisé au point 2, puisque c'est un point de la ligne de régime, on a

$$\Phi_1 A = \Psi_1 \Omega, \tag{10}$$

et si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\Phi_1 A}{I\Omega^3} = \frac{\Psi_1}{I\Omega^2} = \frac{1}{2\rho}, \tag{11}$$

$$4 A \rho \varepsilon = \gamma^2, \tag{12}$$

l'équation (8) devient

$$\frac{\gamma^2}{2} \frac{dz}{dx} = \alpha - A + \alpha z, \tag{13}$$

dont l'intégrale est

$$z = \frac{2}{\gamma^2} e^{\frac{x^2}{\gamma^2}} \int_A^x (\alpha - A) e^{-\frac{x^2}{\gamma^2}} d\alpha. \tag{14}$$

Deux remarques importantes doivent être faites ici : en premier lieu, l'équation (14), dans laquelle z et $\alpha - A$ sont les deux variables, représente l'équation de la courbe de fermeture, lorsqu'on prend pour coordonnées d'un point les quantités $z = \frac{\Omega - \omega}{\Omega}$ et $\alpha - A$; ceci revient à considérer des axes de coordonnées ayant le point 2 pour origine et l'axe des z dirigé vers le bas, l'unité de longueur prise pour mesurer les z étant Ω. Afin d'obtenir l'homogénéité des formules, nous choisirons pour unité de longueur des abscisses la quantité A et nous aurons ainsi pour variables, dans les calculs qui vont suivre, $z = \frac{\Omega - \omega}{\Omega}$ et $x = \frac{\alpha - A}{A}$.

La seconde remarque est relative au sens pratique de la quantité auxiliaire ρ et au procédé expérimental qui permettra de la déterminer.

Imaginons que la machine étant à l'état de régime, avec la vitesse Ω et sous l'action de la résistance Ψ_1, on ferme brusquement la vanne en totalité; le travail moteur s'annule, la vitesse diminue, et le mouvement s'arrête au bout d'un temps correspondant au chemin θ_1, lorsque le travail résistant $\Psi_1\theta_1$ est devenu égal à la force vive $\frac{I\Omega^2}{2}$, possédée au moment de la fermeture. On déduit de cette égalité

$$\rho = \frac{I\Omega^2}{2\Psi_1} = \theta_1,$$

et l'on voit ainsi que ρ est précisément le chemin parcouru par la machine, depuis l'instant où la vanne a été fermée jusqu'à l'arrêt complet.

Il est donc facile de déterminer, dans chaque cas, la quantité ρ par l'expérience. D'après cela, et pour les raisons données plus haut lorsque nous avons remplacé la puissance et la résistance par leurs valeurs moyennes, nous agirons de même pour ρ et nous le supposerons remplacé par sa valeur moyenne pour toutes les courbes de fermeture et d'ouverture correspondant à une même perturbation; ρ sera ainsi une sorte de constante spécifique qui caractérisera la machine particulière que l'on étudie, et dont l'expérience fournira toujours une valeur suffisamment approchée.

L'équation de la courbe de fermeture que nous venons d'obtenir

$$z = \frac{2}{\gamma^2} e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}} \int_A^\alpha (\alpha - A) e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}} d\alpha$$

pourrait être transformée en exprimant l'intégrale qui y figure à l'aide de la seule transcendante $\int e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}} d\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$; mais les formules auxquelles on arrive ainsi se prêtent difficilement à la discussion, et il est préférable, à ce point de vue, de mettre l'équation précédente sous une autre forme.

3. — Nouvelle forme de l'équation d'une courbe de fermeture.

Désignons par $D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)$, $D^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)$, $D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)$,... les dérivées successives de la fonction $e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}$; on a, par une intégration par parties,

$$\frac{\gamma^2}{2}z = \frac{(\alpha - A)^2}{1.2} - e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^\alpha \frac{(\alpha - A)^2}{1.2} D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right) d\alpha,$$

on en déduit, en opérant sur cette dernière intégrale de la même façon,

$$\frac{\gamma^2}{2}z = \frac{(\alpha - A)^2}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}(\alpha - A)^3 \frac{D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^\alpha (\alpha - A)^3 D^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right) d\alpha,$$

puis encore

$$\frac{\gamma^2}{2}z = \frac{1}{1.2}(\alpha - A)^2 - \frac{1}{1.2.3}(\alpha - A)^3 \frac{D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4}(\alpha - A)^4 \frac{D^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} - \frac{1}{1.2.3.4} e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^\alpha (\alpha - A)^4 D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right) d\alpha$$

et, en général,

$$\frac{\gamma^2}{2}z = \frac{1}{2!}(\alpha - A)^2 - \frac{1}{3!}(\alpha - A)^3 \frac{D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} + \frac{1}{4!}(\alpha - A)^4 \frac{D^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{n!}(\alpha - A)^n \frac{D^{(n-2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^\alpha (\alpha - A)^n D^{(n-1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right) d\alpha.$$

On reconnaît dans ce développement les polynômes de M. Hermite

$$\frac{D^{(1)}(e^{-x^2})}{e^{-x^2}},\quad \frac{D^{(2)}(e^{-x^2})}{e^{-x^2}},\quad \frac{D^{(3)}(e^{-x^2})}{e^{-x^2}},\quad \ldots.$$

Si l'on remplace ces polynômes par leurs expressions

$$\frac{D^{(1)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} = -\frac{2\alpha}{\gamma^2},$$

$$\frac{D^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} = \frac{4\alpha^2}{\gamma^4} - \frac{2}{\gamma^2},$$

$$\frac{D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)}{e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}} = -\frac{8\alpha^3}{\gamma^6} + \frac{12\alpha}{\gamma^4},$$

. . . .

et que l'on mette en évidence la variable $\alpha - A$ en remplaçant α par $\alpha - A + A$, on obtient

$$\frac{\gamma^2}{2}z = \frac{1}{2!}(\alpha - A)^2 + \frac{2}{3!}\frac{2}{\gamma^2}A(\alpha - A)^3 + \frac{2}{3!}\frac{1}{\gamma^2}(\alpha - A)^4 - \frac{2}{4!}\frac{1}{\gamma^2}(\alpha - A)^4$$
$$+ \frac{4}{4!}A^2\frac{1}{\gamma^4}(\alpha - A)^4 + \frac{1}{3}A(\alpha - A)^5\frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{6}(\alpha - A)^6\frac{1}{\gamma^4} + \ldots,$$

qui peut s'écrire

$$z = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4$$
$$+ \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^6 + \ldots.$$

Si donc on s'arrête à ces termes, l'équation de la courbe de fermeture devient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4 \\ & + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^6 - \frac{1}{12\gamma^2}e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^{\alpha}(\alpha - A)^4 D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)d\alpha \end{aligned}\right.$$

Nous discuterons plus loin cette expression; mais auparavant nous allons calculer l'équation d'une courbe d'ouverture, afin que notre discussion puisse porter à la fois sur toutes les courbes de déplacement.

4. — Équation d'une courbe d'ouverture.

La méthode que nous suivrons étant identique à celle qui vient de nous servir au n° **2**, nous ne ferons qu'indiquer la suite des calculs.

On a tout d'abord

$$d\alpha = \varepsilon' d\theta, \tag{16}$$

où nous donnons maintenant au second membre le signe positif, puisque α doit croître avec θ.

Mais, d'autre part, si l'on prend pour axes de coordonnées la tangente horizontale au point 5 (*fig.* 4) et la perpendiculaire dirigée vers le haut, les variables deviennent

$$\alpha - A' \quad \text{et} \quad \frac{\omega - \Omega'}{\Omega'} = z,$$

en désignant par A' et Ω' les anciennes coordonnées du point 5 et en prenant Ω' comme unité des longueurs z.

Dans ces conditions, les équations fondamentales (1) et (2) sont

$$I\Omega'^2 dz = (\Phi_1 \alpha - \Omega' \Psi_1)\, d\theta - \alpha \Phi_1 z\, d\theta, \tag{17}$$

$$\omega = \Omega'(1 + z), \tag{18}$$

et si l'on introduit les variables auxiliaires ρ et γ', γ' étant défini par la relation

$$4 A' \rho \varepsilon' = \gamma'^2,$$

l'équation (17) s'écrit

$$\frac{\gamma'^2}{2} \frac{dz}{d\alpha} = \alpha - A' - \alpha z, \tag{19}$$

qui est l'équation d'une courbe d'ouverture.

L'intégrale de cette équation est

$$z = \frac{2}{\gamma'^2} e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} \int_{A'}^{\alpha} (\alpha - A') e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} d\alpha, \tag{20}$$

et, si on la transforme comme nous l'avons fait pour les courbes de fermeture, on a

$$\frac{\gamma'^2}{2} z = \frac{(\alpha - A')^2}{2} - e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} \int_{A'}^{\alpha} \frac{(\alpha - A')^2}{2} D^{(1)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right) d\alpha$$

$$= \frac{(\alpha - A')^2}{1.2} - \frac{(\alpha - A')^3}{1.2.3} \frac{D^{(1)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right)}{e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}} + \frac{1}{1.2.3} e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} \int_{A'}^{\alpha} (\alpha - A')^3 D^{(2)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right) d\alpha$$

$$= \frac{(\alpha - A')^2}{1.2} - \frac{(\alpha - A')^3}{1.2.3} \frac{D^{(1)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right)}{e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}} + \frac{(\alpha - A')^4}{1.2.3.4} \frac{D^{(2)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right)}{e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}}$$

$$- \frac{1}{1.2.3.4} e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} \int_{A'}^{\alpha} (\alpha - A')^4 D^{(3)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right) d\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} z = {} & \left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2 \left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4 \left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^3 \\ & + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] \left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^4 \left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^6 \left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^5 \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^6 \left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^6 - \frac{1}{12\gamma'^2} e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}} \int_{A'}^{\alpha} (\alpha - A')^4 D^{(3)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right) d\alpha. \end{aligned} \right.$$

C'est là l'équation d'une courbe d'ouverture, sous une forme absolument analogue à celle donnée par l'équation (15) pour la courbe de fermeture.

Nous devons maintenant aborder les considérations pratiques que comporte la question traitée, afin de mieux déterminer le champ de variation des variables, d'en déduire quels sont les termes négligeables dans les équations (15) et (21) et de ramener ainsi ces équations à une forme plus simple, bien que suffisamment approchée.

3. — Détermination du champ de variation des variables.

Les équations (15) et (21) des courbes de déplacement ne dépendent chacune que de deux paramètres; pour l'une, c'est $\frac{A}{\gamma}$ et $\frac{\alpha - A}{A}$, pour l'autre $\frac{A'}{\gamma'}$ et $\frac{\alpha - A'}{A'}$. Il nous suffira donc, pour être en mesure d'apprécier l'ordre de grandeur de chaque terme, de déterminer, d'une part, la valeur moyenne de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et, d'autre part, l'amplitude relative des oscillations de la vanne représentée par $\frac{\alpha - A}{A}$.

En ce qui concerne cette dernière quantité, il est bien clair que sa valeur sera toujours faible, étant données les perturbations que nous avons à étudier. Si l'on admet que $\frac{\alpha - A}{A}$ ne dépasse jamais $\frac{1}{2}$, on aura fixé évidemment une limite extrême; il est tout à fait exceptionnel, en effet, que les outils susceptibles d'être débrayés simultanément correspondent à la moitié du travail moteur total, surtout si l'on considère que ce travail comprend celui qui est nécessaire à l'entretien du mouvement des transmissions, lequel représente toujours une fraction assez importante. Généralement même, $\frac{\alpha - A}{A}$ atteindra au plus $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{4}$. Quant au paramètre $\frac{\alpha}{\gamma}$, nous déterminerons sa valeur moyenne de la façon suivante :

Supposons que, la machine étant à une vitesse ω sous l'action d'une certaine résistance, cette résistance soit brusquement supprimée; la vitesse croîtra d'une façon continue, jusqu'à ce que l'action du régulateur ait fermé complètement la vanne. A cet instant, les travaux moteur et résistant étant nuls, le mouvement deviendra uniforme et la vitesse constante ω_m de ce mouvement sera la valeur maxima atteinte par la vitesse dans la période de fermeture.

Il est bien évident que les conditions où nous venons de nous placer sont purement théoriques et que l'on ne saurait les réaliser. Il est impossible, en réalité, de faire disparaître toutes les résistances, car, ainsi que nous l'avons spécifié, elles comprennent la force nécessaire pour entre-

tenir le mouvement du moteur lui-même, laquelle ne saurait jamais être nulle en raison des frottements. D'un autre côté, le rendement diminue assez rapidement quand la vitesse augmente au delà d'une certaine limite, et il en résulte pratiquement un abaissement relatif de la vitesse maxima réalisée quand on supprime toutes les résistances. Pour ces diverses raisons, la vitesse ω_m est donc une vitesse théorique extrême qui, dans la pratique, ne pourra jamais être atteinte, mais qu'il est utile néanmoins de considérer en raison des relations simples auxquelles elle conduit.

Cela posé, si l'on admet que le régulateur a agi dès le début de la période de fermeture considérée, c'est-à-dire si l'on suppose que ω est égal à la vitesse d'embrayage de fermeture, ce qui n'a d'ailleurs d'autre but que de simplifier l'écriture, on a

$$I\omega\, d\omega = \Phi_1 \alpha\, dt,$$

d'après le théorème des forces vives.

Mais, comme on a toujours, d'autre part,

$$d\theta = \omega\, dt,$$

on en déduit

$$I\omega^2 d\omega = \Phi_1 \alpha\, d\theta$$

ou encore, d'après la relation entre θ et α,

$$I\omega^2 d\omega = -\Phi_1 \alpha \frac{d\alpha}{\varepsilon}.$$

Si donc nous intégrons depuis le moment où la résistance a disparu jusqu'à celui où la vanne a été complètement fermée, nous aurons

$$I \frac{\omega_m^3 - \omega^3}{3} = \Phi_1 \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}$$

ou encore, d'après la définition de ρ,

$$\frac{1}{3} \frac{\omega_m^3 - \omega^3}{\omega^3} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

On voit ainsi que le rapport $\frac{\alpha}{\gamma}$ correspond à l'accroissement extrême de vitesse que tolère, dans les conditions théoriques où nous nous sommes placé, le mécanisme de commande du vannage.

Ce rapport devra donc, en général, avoir une petite valeur.

En faisant le calcul, on obtient les résultats suivants :

$\frac{\omega_m}{\omega} =$	1,01	1,1	1,25	1,5	1,6	2
$\frac{\alpha}{\gamma} =$	0,08	0,33	0,56	0,89	1	1,5

Or, dans les circonstances normales, un appareil de régulation bien installé ne permet pas à la vitesse théorique dont nous venons de parler, même dans les conditions limites que nous avons imaginées, d'atteindre le double de sa grandeur normale. Il convient même de ne pas arriver à cette valeur. Nous regarderons donc l'unité comme la limite supérieure des valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$, qu'il y a lieu de considérer.

Il faut d'ailleurs remarquer que, dans les moteurs hydrauliques, moteurs où, le mouvement du vannage nécessitant une force considérable, on ne peut songer à des mouvements très rapides de la vanne et où, par suite, on ne peut obtenir une régularisation trop immédiate, $\frac{\alpha}{\gamma}$ ne descend pas au-dessous d'une certaine limite. Nous avons vu, en effet, que ce rapport correspond à l'accroissement maximum de vitesse que tolère le mécanisme de régulation; si donc $\frac{\alpha}{\gamma}$ était suffisamment petit, l'écart maximum de vitesse deviendrait très faible et le régulateur empiéterait sur les fonctions du volant, puisqu'il serait influencé par les variations de vitesse de l'ordre des variations périodiques que le volant doit corriger.

Si l'on admet que le rapport $\frac{\omega_m}{\omega}$ ne s'abaisse jamais au-dessous de 1,05, ce qui revient à supposer que les machines où le mouvement est le plus régulier tolèrent néanmoins une variation de $\frac{1}{20}$ dans leur vitesse de marche, quand on débraye tous les outils et qu'on laisse au régulateur

le soin de limiter la vitesse, on voit que $\frac{\alpha}{\gamma}$ ne descend pas au-dessous de 0,2.

En résumé donc, pour les circonstances ordinaires que présentent les applications, on doit regarder $\frac{\alpha - A}{A}$ comme une petite fraction, toujours inférieure à $\frac{1}{2}$ et ne dépassant guère $\frac{1}{4}$; on doit admettre d'autre part que $\frac{\alpha}{\gamma}$ reste compris entre $\frac{1}{6}$ et 1.

Comme vérification des conclusions auxquelles nous sommes ainsi parvenu en considérant des cas extrêmes, nous pouvons examiner les conséquences qui en résultent dans les conditions normales de la question que nous traitons. C'est d'ailleurs par l'examen de ces conséquences que l'on devra le plus souvent déterminer les appareils de régulation à établir, et il n'est pas inutile de montrer comment on peut y arriver à l'aide de calculs très simples.

Pour atteindre ce résultat, il nous suffit évidemment d'une approximation peu considérable, et nous pouvons réduire l'équation différentielle (13) à son premier terme, ce qui lui donne la forme très simple

$$\frac{\gamma^2}{2}\frac{dz}{d\alpha} = \alpha - A.$$

On en déduit

$$z = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2.$$

Cette formule approchée montre que, si l'on fait $\frac{A}{\gamma}$ égal à l'unité, une diminution brusque de moitié dans la résistance totale produit dans la vitesse une variation de $\frac{1}{4}$ environ. Une semblable variation de vitesse doit être, la plupart du temps, regardée comme très forte, et l'on voit, par suite, qu'il n'y a généralement pas lieu, ainsi que nous l'avons dit, de considérer les valeurs de $\frac{A}{\gamma}$ plus grandes que l'unité.

Quant au champ de variations de z, il résulte dans une certaine mesure des valeurs limites que nous venons de déterminer pour $\frac{\alpha - A}{A}$

et $\frac{A}{\gamma}$; mais, en dehors de cette considération, il importe de remarquer que, par la nature même de la question, z doit toujours être petit.

Au point de vue surtout du phénomène des oscillations à longues périodes, nous n'aurons à considérer que de très petites valeurs de z très sensiblement inférieures à la valeur $\frac{1}{4}$ que nous avons obtenue en nous plaçant dans un cas extrême.

On peut admettre que, en moyenne, elles ne pourront guère dépasser la moitié de cette valeur, soit $\frac{1}{8}$.

6. — Réduction de l'équation des courbes de déplacement.

Cette condition, si importante pour toutes les questions pratiques, que les variables restent comprises dans une zone limitée de variation, doit être introduite maintenant dans les équations, afin de les simplifier le plus possible et d'écarter tout ce qui, étant étranger à la question, masquerait les résultats.

Déterminons tout d'abord l'ordre d'approximation sur lequel nous pouvons compter, ce qui nous permettra, connaissant l'ordre de grandeur de chaque terme dans le développement de z, de supprimer les termes négligeables.

Reportons-nous pour cela à la manière même dont a été établie l'équation fondamentale

$$\frac{\gamma}{2}\frac{dz}{dx} = \alpha - A + \alpha z. \tag{13}$$

Elle provient, comme nous le savons, des deux équations

$$I\omega\, d\omega + \Psi_1\, d\theta = \Phi_1\, \alpha\, dt, \tag{1}$$

$$d\theta = \omega\, dt, \tag{2}$$

lorsqu'on pose

$$\omega^2 = \Omega^2(1 - 2z)$$

et lorsqu'on néglige les termes en z^2.

Or, si l'on maintient ces termes dans les calculs, en tenant compte toujours des relations

$$(7) \qquad d\alpha = -\varepsilon\, d\vartheta,$$

$$(11) \qquad \frac{\Phi_1 A}{I\Omega^3} = \frac{\Psi_1}{I\Omega^2} = \frac{1}{2\rho},$$

$$(12) \qquad 4A\rho\varepsilon = \gamma^2,$$

on trouve

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{2}{\gamma^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-2z}} - A\right),$$

ou encore

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{2}{\gamma^2}\left(\alpha - A + \alpha z + \tfrac{3}{2}\mu\alpha z^2\right),$$

μ étant une quantité peu différente de l'unité [1].

L'importance des éléments qu'on laisse de côté dans l'équation différentielle, lorsqu'on la prend sous la forme (13), peut donc être représentée par

$$\frac{3}{\gamma^2}\mu\alpha z^2,$$

et, comme nous ne voulons avoir que l'ordre de grandeur de cette quantité, il est permis d'y remplacer z par sa valeur approchée

$$\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2$$

et α par A qui en diffère peu et en est une des valeurs.

---

[1] La quantité μ est définie par l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z}} = 1 + z + \tfrac{3}{2}\mu z^2;$$

or, si l'on donne à z dans cette relation les deux valeurs extrêmes $\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4}$ qu'il n'atteint jamais pratiquement, on trouve pour μ les valeurs 1,75 et 0,7, ce qui suffit à montrer que cette quantité μ ne s'éloigne jamais beaucoup de l'unité.

C'est là le seul renseignement qu'il nous soit utile d'avoir sur μ, car nous ne nous proposons pas de calculer la valeur exacte de l'erreur commise, mais bien l'ordre de grandeur de cette erreur.

On obtient ainsi

$$3\frac{\mu}{\gamma^6}A(\alpha - A)^4,$$

et, dès lors, la valeur approchée des variations qui peuvent en résulter pour z est

$$3\frac{\mu}{\gamma^6}\int_A^\alpha A(\alpha - A)^4\,d\alpha = \tfrac{3}{5}\mu\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5.$$

Cette expression fixera les termes qu'on doit négliger, dans l'expression analytique du développement de z fourni par l'équation linéaire, pour arriver à l'expression pratique.

Reprenons donc les valeurs de z précédemment obtenues, pour le cas de la fermeture de la vanne et pour celui de l'ouverture,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3 \\ & + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5 \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^6 - \frac{1}{12\gamma^2}e^{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\int_A^\alpha(\alpha - A)^4 D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)d\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & \left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^3 \\ & + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^4\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^6\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^5 \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^6\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^6 - \frac{1}{12\gamma'^2}e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\int_{A'}^\alpha(\alpha - A')^4 D^{(3)}\left(e^{\frac{\alpha^2}{\gamma'^2}}\right)d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Dans ces deux formules, l'intégrale qui constitue le dernier terme a tous ses éléments en $(\alpha - A)^4$ du même signe; elle est donc égale à l'intégrale de $(\alpha - A)^4$ ou $\left(\frac{\alpha - A}{5}\right)^5$, multipliée par une moyenne entre les autres éléments $D^{(3)}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right)$; on a, par suite, pour la formule (15) par

exemple,

$$\int_A^\alpha (\alpha - A)^4 D^{(3)} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\right) d\alpha = \left(\frac{\alpha - A}{5}\right)^5 \left[e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}} \left(\frac{12\alpha}{\gamma^4} - \frac{8\alpha^3}{\gamma^6}\right)\right]_{\alpha = \alpha_i},$$

α_i étant une certaine valeur parmi celles que prend α.

La quantité entre crochets est un produit de deux facteurs dont l'un $e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}$ ne change jamais de signe et varie dans des limites assez restreintes, puisque α lui-même reste compris dans un champ assez étroit. On peut donc remplacer $e^{-\frac{\alpha_i^2}{\gamma^2}}$ par $\nu e^{-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}$, ν étant un nombre peu différent de l'unité.

Le dernier terme de la formule (15) devient ainsi

$$-\frac{\nu}{15}\left[3\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right]_{\alpha = \alpha_i} \times \left(\frac{A}{\gamma}\right)^5 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5.$$

Le terme en $\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^6 \left(\frac{A}{\gamma}\right)^6$ est négligeable, puisqu'il est d'ordre supérieur à l'expression $\frac{3}{6}\mu\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5$ qui fixe l'ordre des termes à négliger. Quant aux termes en $\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5$, ils ont pour coefficient, d'après ce qui précède,

$$\left(\frac{A}{\gamma}\right)^5 \left\{\frac{2}{3}\frac{A}{\gamma} - \frac{\nu}{15}\left[3\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3\right]_{\alpha = \alpha_i}\right\},$$

et il faut comparer cette expression à $\frac{3}{6}\mu\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6$, c'est-à-dire comparer

$$\frac{2}{3}\frac{A}{\gamma} - \frac{\nu}{15}\left[3\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3\right]_{\alpha = \alpha_i} \quad \text{à} \quad \frac{3}{6}\mu\left(\frac{A}{\gamma}\right).$$

Or, si l'on considère la quantité entre crochets, on voit que sa plus grande valeur est donnée par

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et qu'elle est alors égale à $\sqrt{2}$. Le coefficient de ν est donc inférieur à $\frac{1}{10}$,

ce qui prouve que l'expression

$$\frac{2}{3}\frac{A}{\gamma} - \frac{\nu}{15}\left[3\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3\right]$$

est inférieure à $\frac{2}{3}\frac{A}{\gamma}$ ou $\frac{10}{15}\frac{A}{\gamma}$ et qu'elle est, dès lors, de l'ordre de $\frac{3}{5}\mu\frac{A}{\gamma}$ ou $\frac{9}{15}\mu\frac{A}{\gamma}$.

Ainsi les termes en $\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5$ sont précisément de l'ordre des quantités à négliger et l'on doit écrire :

1° Pour la courbe de fermeture,

$$(22)\quad z = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3 + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4;$$

2° Pour la courbe d'ouverture,

$$(23)\quad z = \left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^3 + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A'}{A'}\right)^4\left(\frac{A'}{\gamma}\right)^4,$$

en se rappelant que l'erreur commise est de l'ordre de grandeur du terme $\frac{3}{5}\mu\left(\frac{A}{\gamma}\right)^6\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5$.

Cela établi, on sait que $\frac{\alpha}{\gamma}$ et, par suite, $\frac{A}{\gamma}$ ou $\frac{A'}{\gamma}$, ne varient guère que de 0,2 à 1, tandis que $\frac{\alpha - A}{A}$ et $\frac{\alpha - A'}{A'}$ sont toujours notablement inférieurs à $\frac{1}{2}$. Dans ces conditions, chacun des termes de la valeur de z est petit par rapport à celui qui le précède, comme il est facile de s'en rendre compte par le Tableau suivant, où nous avons réuni les valeurs relatives des termes T_2, T_3, T'_3,

$$\frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3 = T_2,$$

$$\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4 = T_3,$$

$$\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^4 = T'_3,$$

c'est-à-dire leur rapport au premier terme $T_1 = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2$ pour différentes valeurs échelonnées de $\frac{A}{\gamma}$ et $\frac{\alpha - A}{A}$.

Nous avons d'ailleurs eu soin, pour chacune de ces valeurs, d'indiquer l'erreur relative à craindre sur z, erreur dont l'expression est

$$\frac{\frac{3}{5}\mu \left(\frac{A}{\gamma}\right)^6 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^5}{\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2} = \frac{3}{5}\mu \left(\frac{A}{\gamma}\right)^4 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3,$$

et nous avons remplacé μ, afin d'avoir un maximum certain de cette erreur, par la limite extrême 1,75 ([1]), qu'il est possible de lui attribuer, ce qui donne $\frac{21}{20}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4 \left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3$.

([1]) *Voir* note précédente du même numéro.

		$\frac{A}{\gamma} = 0,2.$	$\frac{A}{\gamma} = 0,4.$	$\frac{A}{\gamma} = 0,6.$	$\frac{A}{\gamma} = 0,8.$	$\frac{A}{\gamma} = 1.$
$\frac{\alpha - A}{A} = 0,1$	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)$	0,003	0,011	0,024	0,043	0,067
	$\frac{T_3}{T_1} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2$ ...	0,0002	0,0009	0,002	0,005	0,008
	$\frac{T'_3}{T_1} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2$	−0,0002	−0,0007	−0,001	−0,002	−0,002
	$\varepsilon = \frac{21}{20}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3$	0,000002	0,000027	0,00014	0,00043	0,001
$\frac{\alpha - A}{A} = 0,2$	$\frac{T_2}{T_1}$	0,006	0,022	0,048	0,086	0,133
	$\frac{T_3}{T_1}$	0,0008	0,0035	0,009	0,018	0,033
	$\frac{T'_3}{T_1}$	−0,0008	−0,0029	−0,005	−0,007	−0,007
	ε	0,000013	0,00022	0,0011	0,0034	0,008
$\frac{\alpha - A}{A} = 0,3$	$\frac{T_2}{T_1}$	0,009	0,033	0,092	0,129	0,200
	$\frac{T_3}{T_1}$	0,0018	0,008	0,020	0,041	0,075
	$\frac{T'_3}{T_1}$	−0,0017	−0,006	−0,012	−0,017	−0,015
	ε	0,000045	0,0007	0,0037	0,0116	0,028
$\frac{\alpha - A}{A} = 0,4$	$\frac{T_2}{T_1}$	0,012	0,044	0,096	0,172	0,267
	$\frac{T_3}{T_1}$	0,0033	0,014	0,036	0,073	0,133
	$\frac{T'_3}{T_1}$	−0,0031	−0,012	−0,022	−0,029	−0,027
	ε	0,0001	0,0017	0,0087	0,0275	0,067
$\frac{\alpha - A}{A} = 0,5$	$\frac{T_2}{T_1}$	0,013	0,053	0,120	0,213	0,333
	$\frac{T_3}{T_1}$	0,005	0,022	0,056	0,114	0,208
	$\frac{T'_3}{T_1}$	−0,0048	−0,018	−0,034	−0,046	−0,042
	ε	0,0002	0,0034	0,017	0,054	0,131

On voit par ce Tableau que le troisième terme de z

$$\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha-A}{A}\right)^4 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4\left(\frac{\alpha-A'}{A'}\right)^4$$

a pour extrême limite, quand $\frac{A}{\gamma}$ et $\frac{\alpha-A}{A}$ atteignent simultanément les valeurs maxima que nous leur avons assignées, les $\frac{2}{10}$ du premier terme et qu'il arrive au plus aux $\frac{7}{100}$ dans les cas ordinaires.

Or il faut remarquer que $\frac{\alpha-A}{A}$ ne peut être voisin de sa limite supérieure qu'au début d'une période oscillatoire, puisque alors l'amplitude des oscillations décroît rapidement. Ce cas n'a donc pas d'intérêts pour l'étude des oscillations à longues périodes, à laquelle nous nous limitons et nous devons admettre que, $\frac{\alpha-A}{A}$ n'ayant jamais alors que des valeurs assez petites, le troisième terme est négligeable, étant donnée l'approximation que comporte la question traitée.

7. — Substitution de paraboles du second degré aux courbes de fermeture et d'ouverture.

L'analyse que nous venons de faire nous a donné la relation existant entre la vitesse de la machine et l'ouverture de la vanne, par une expression qui fournit la première en fonction de la seconde. Mais, si l'on se reporte au mode de fonctionnement même des organes entre eux, il est clair que c'est le régulateur qui détermine la position de la vanne, que la vitesse de la machine, fixant celle de l'appareil à boules, est ainsi la variable indépendante et que, par suite, il convient, pour l'étude pratique du phénomène, de transformer l'équation que nous avons obtenue en exprimant $\frac{\alpha-A}{A}$ en fonction de z.

Reprenons donc les équations des courbes de fermeture et d'ouverture

$$(22)\quad z=\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha-A}{A}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha-A}{A}\right)^3+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha-A}{A}\right)^4,$$

$$(23)\quad z=\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2\left(\frac{\alpha-A'}{A'}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4\left(\frac{\alpha-A'}{A'}\right)^3+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^2-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)^4\left(\frac{\alpha-A'}{A'}\right)^4.$$

Posons, dans la première, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\alpha - \text{A}}{\text{A}} = x, \quad \frac{2}{3}\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)^2 = a, \quad \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)^2 = b,$$

l'équation (22) devient

$$z = \tfrac{3}{2} a x^2 (1 + ax + bx^2),$$

ce qui peut s'écrire

$$x = \sqrt{\frac{2}{3a}} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1 + ax + bx^2}}$$

ou encore

$$z = \sqrt{\frac{2}{3a}} \sqrt{z} \left[1 - \tfrac{1}{2}(ax + bx^2) + \tfrac{3}{8}(ax + bx^2)^2 - \ldots\right].$$

En appliquant alors la méthode des approximations successives, on obtient, pour première valeur approchée,

$$x = \sqrt{\frac{2}{3a}} \sqrt{z} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{A}}{\gamma} x = \sqrt{z},$$

équation d'une parabole à axe vertical, que fournirait l'équation (22) limitée à son premier terme.

La seconde valeur approchée est représentée par

$$\frac{\text{A}}{\gamma} x = \sqrt{z}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\text{A}}{\gamma}\sqrt{z}.\right) \tag{24}$$

C'est encore une parabole de second degré, mais dont l'axe n'est plus vertical.

Enfin, la troisième valeur approchée serait

$$\frac{\text{A}}{\gamma} x = \sqrt{z}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)\sqrt{z} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)^2\right] z\right\}. \tag{25}$$

Les deux valeurs (24) et (25) diffèrent par le terme

$$\frac{1}{\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\left(\frac{\text{A}}{\gamma}\right)^2\right] z\sqrt{z},$$

dont le rapport à la variable $\frac{1}{\left(\frac{A}{\gamma}\right)}\sqrt{z}$ est

$$\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\right]z.$$

Or ce rapport, dans le cas extrême de $\frac{A}{\gamma} = 1$ et de $\frac{\alpha - A}{A} = \frac{1}{2}$, où la valeur de z est voisine de $\frac{1}{4}$, atteint environ $\frac{1}{30}$.

Pour des conditions moyennes, telles par exemple que $\frac{A}{\gamma} = 0,8$ et $\frac{\alpha - A}{A} = 0,4$, ce qui correspond à z voisin de $0,1$, c'est-à-dire ce qui permet encore, pour une vitesse de 100 tours, une variation de 90 à 110 tours, le rapport en question est inférieur à $\frac{1}{60}$.

On peut donc, en restant dans l'ordre d'approximation que comporte la question, s'arrêter à la formule (24) et prendre pour équation de la courbe de fermeture

$$\frac{A}{\gamma}x = \sqrt{z}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)\sqrt{z}\right].$$

Par un calcul identique, on trouve pour équation de la courbe d'ouverture, en partant de la formule (23),

$$(25) \qquad \frac{A'}{\gamma'}x = \sqrt{z}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{A'}{\gamma'}\right)\sqrt{z}\right].$$

Les courbes d'ouverture et de fermeture sont donc ramenées à des paraboles du second degré et les détails dans lesquels nous sommes entrés prouvent que l'approximation ainsi obtenue est suffisante, lorsqu'il s'agit d'étudier les oscillations à longues périodes ([1]).

([1]) On peut arriver au même résultat par un procédé plus géométrique et qu'il est bon d'indiquer.

Nous avons montré que l'équation d'une courbe de fermeture pouvait être considérée comme donnée par

$$z = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right)^4\left(\frac{\alpha - A}{A}\right)^3,$$

Il nous reste maintenant à étudier les propriétés principales de ces paraboles.

8. — Propriétés des paraboles d'ouverture et de fermeture.

On a vu que l'équation d'une ligne de régime était représentée par

$$\Phi\alpha = \Psi\omega,$$

dans laquelle Ψ est le paramètre constant qui la caractérise et Φ une certaine quantité dépendant du rendement. On sait de plus que, dans la

---

ce qui, avec les notations adoptées, s'écrit

$$z = \frac{3a}{2} x^2 (1 + ax).$$

Cette courbe étant tangente à l'axe des x à l'origine, considérons une parabole satisfaisant à la même condition

$$z = (\lambda x + \mu z)^2$$

et déterminons les deux paramètres λ et μ, de façon qu'elle épouse le mieux possible la courbe considérée dans le champ connu de variation des variables.

L'équation de la parabole donne

$$z = \frac{1 - 2\lambda\mu x \pm \sqrt{1 - 4\lambda\mu x}}{2\mu^2}$$

ou encore

$$z = \frac{1 - 2\lambda\mu x \pm (1 - 2\lambda\mu x - 2\lambda^2\mu^2 x^2 - 4\lambda^3\mu^3 x^3 - \ldots)}{2\mu^2},$$

puisque x n'a jamais que de petites valeurs, inférieures en tout cas à $\frac{1}{2}$.

La valeur de z qui s'annule à l'origine, c'est-à-dire qui est donnée par le signe négatif devant la parenthèse, est ainsi

$$z = \lambda^2 x^2 + 2\lambda^3 \mu x^3 + \ldots;$$

sa différence avec le z de la courbe est

$$\left(\lambda^2 - \frac{3a}{2}\right) x^2 + \left(2\lambda^3\mu - \frac{3a^2}{2}\right) x^3 + \ldots$$

et, pour qu'elle soit la plus petite possible, il faut

$$\lambda^2 = \frac{3a}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{A}{\gamma} \quad \text{avec} \quad 2\lambda^3\mu = \frac{3a^2}{2} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{\gamma}\right),$$

ce qui correspond précisément à la parabole que nous avons prise.

zone que l'on considère, le rendement, voisin de son maximum, est sensiblement fixe. Cela revient à dire que les lignes de régime peuvent être remplacées dans la zone en question par des droites concourantes issues de l'origine des coordonnées.

Cette substitution revient en somme à remplacer, dans l'étendue considérée, la ligne de régime par sa tangente, car nous allons voir que le point correspondant au maximum de rendement est le point de contact de la tangente issue de l'origine.

Nous savons, en effet, que, pour une résistance donnée, c'est-à-dire pour un nombre donné de machines embrayées, le travail résistant est, pendant l'unité de temps, proportionnel au chemin parcouru par la machine, ou, si l'on veut, à ω; nous savons, d'autre part, que le travail moteur correspondant à la même unité de temps est proportionnel à l'ouverture de vanne α; le rendement, pour un point quelconque de la ligne de régime, est donc représenté par $\frac{\omega}{\alpha}$, tangente trigonométriqne de l'angle que fait, avec l'axe des α, la ligne qui joint le point considéré à l'origine. On voit ainsi que le maximum de rendement, donné par la plus grande valeur de cet angle, correspond au point de contact de la ligne de régime avec la tangente issue de l'origine.

Cela posé, représentons un cycle quelconque (*fig.* 11).

L'équation de la parabole de fermeture 1, 2, 3, rapportée aux axes Z2X et lorsqu'on prend Ω et A pour unités respectives des z et des x, est

$$\frac{A}{\gamma}x = \sqrt{z}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{A}{\gamma}\sqrt{z}\right). \tag{24}$$

Si l'on ne spécifie plus les unités, cette équation devient

$$\frac{A}{\gamma}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{z}{\Omega}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{A}{\gamma}\sqrt{\frac{z}{\Omega}}\right),$$

ou encore

$$\left(x + \frac{1}{3}\frac{A}{\Omega}z\right)^2 = \frac{4A\rho\varepsilon}{\Omega}z, \tag{26}$$

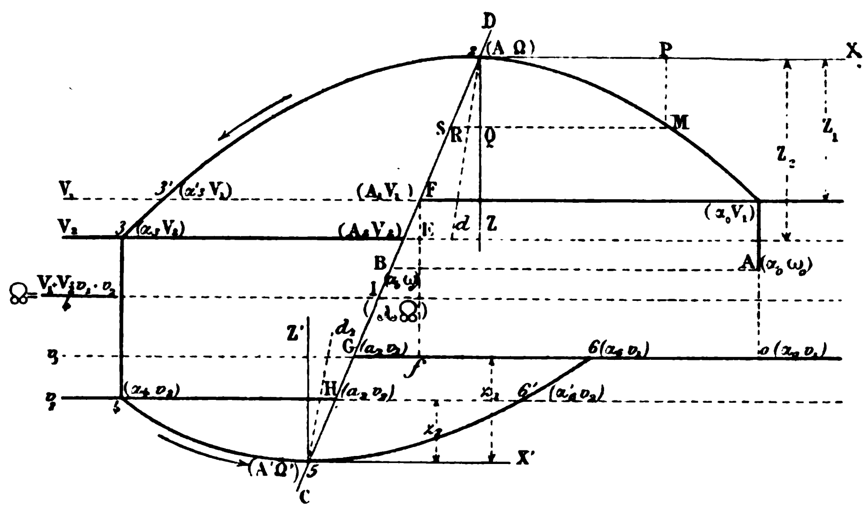
en se rappelant que γ^2 est égal à $4A\rho\varepsilon$.

Le diamètre des cordes parallèles à 2X est

$$x + \frac{1}{3}\frac{A}{\Omega}z = 0.$$

Il est donc parallèle pour toutes les paraboles de fermeture des cycles successifs d'une même perturbation, puisque, pour toutes ces paraboles qui correspondent à une même ligne de régime, le rapport $\frac{A}{\Omega}$ est le même.

Fig. 11.



De plus, ce diamètre $2d$ est trois fois moins incliné sur la verticale que la ligne de régime, ce qui permet, une ligne de régime étant donnée, de construire immédiatement la direction commune à tous les diamètres des paraboles de fermeture.

Nous ferons remarquer enfin que toutes les paraboles que représente l'équation (26), quand l'origine 2 se déplace sur la ligne de régime CD, sont égales entre elles, puisque ρ et ε ont des valeurs constantes (*voir* n° 2) et que $\frac{A}{\Omega}$ conserve la même valeur.

En résumé donc, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Dans l'étendue où l'on doit les considérer, toutes les courbes de fermeture relatives à une même ligne de régime peuvent être regardées comme des paraboles égales, ayant leurs axes parallèles et trois fois moins inclinés sur la verticale que la ligne de régime correspondante.

Nous pourrons de la même manière établir que les paraboles d'ouverture sont égales entre elles et ont leurs axes parallèles; le calcul, que nous ne ferons qu'indiquer, va nous conduire à une conséquence importante.

L'équation d'une parabole d'ouverture, rapportée aux axes Z′5X′ (*fig.* 11) et sans spécification d'unités, est

$$\frac{A'}{\gamma'}\frac{x}{A'}=\sqrt{\frac{z}{\Omega'}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{A'}{\gamma'}\sqrt{\frac{z}{\Omega'}}\right),$$

qui peut s'écrire

$$(27)\qquad \left(x-\frac{1}{3}\frac{A'}{\Omega'}z\right)^2=\frac{4A'\rho\varepsilon'}{\Omega'}z;$$

la direction de l'axe est donc

$$x-\frac{1}{3}\frac{A'}{\Omega'}z=0,$$

et l'on voit que c'est précisément la direction de l'axe des paraboles de fermeture, puisque $\frac{A'}{\Omega'}$ est égal à $\frac{A}{\Omega}$ du moment où les courbes de fermeture et d'ouverture considérées correspondent à la même perturbation. On déduit de là ce théorème :

Toutes les courbes d'ouverture relatives à une même ligne de régime peuvent être considérées comme des paraboles égales entre elles et ayant leurs axes parallèles à la direction commune des axes de toutes les paraboles de fermeture.

Il faut remarquer encore que, dans le cas où ε est égal à ε', c'est-à-dire lorsque le mécanisme de commande du vannage est également énergique pour l'ouverture et la fermeture, ce qui est le cas général de la pratique, *les paraboles d'ouverture et de fermeture sont égales entre elles.*

Les théorèmes qui viennent d'être établis permettent, par la construction simple des courbes de déplacement à laquelle ils conduisent, de discuter complètement le problème; mais, pour faciliter cette discussion, il convient de faire un changement d'axes qui nous donnera l'équation des paraboles sous une forme particulièrement simple.

Considérons un point M de la parabole de fermeture représentée

fig. 11; les coordonnées de ce point étant $x = \text{MQ}$ et $z = \text{MP}$, l'équation de la courbe est

$$(26) \qquad \left(x + \frac{1}{3}\frac{A}{\Omega}z\right)^2 = \frac{4A\rho\varepsilon}{\Omega}z.$$

Prenons, pour nouvelle abscisse, la distance MR, comptée sur l'horizontale, du point M au diamètre $2d$; il nous suffit de remplacer x par

$$x_1 - \tfrac{1}{3}\text{QS},$$

c'est-à-dire par

$$x_1 - \tfrac{1}{3}z \operatorname{tang} \text{Q}2\text{S}$$

ou encore

$$x_1 - \frac{1}{3}\frac{A}{\Omega}z;$$

la nouvelle équation de la courbe est donc

$$(28) \qquad z = \frac{\Omega}{4A\rho\varepsilon}x_1^2,$$

et c'est sous cette forme qu'il convient de la prendre pour en effectuer le tracé.

Dans cette équation ρ et ε sont des constantes, qui caractérisent la machine et le mécanisme de commande de son vannage.

Si la machine existe, ρ se déduit d'une expérience ainsi que cela a été dit au n° 2 de ce Chapitre; si elle est seulement à l'état de projet, on obtient la valeur de ρ par l'expression

$$\rho = \frac{I\Omega^2}{2\Psi_1},$$

ce qui oblige alors à calculer les moments d'inertie des principales pièces de la machine.

Quant au rapport $\frac{\Omega}{A}$ qui fixe la position de la ligne de régime correspondant à la résistance qu'éprouve la machine, c'est-à-dire au travail utile qu'elle a à effectuer, il résulte de la connaissance même de cette résistance qui est une des données de la question.

La courbe de déplacement étant ainsi déterminée par rapport à deux axes formés d'une horizontale et d'une parallèle au diamètre, lorsque,

dans l'équation (28), on compte les abscisses horizontalement et les ordonnées verticalement, il suffit, pour fixer la position de cette courbe, d'en connaître un seul point. Or on a le point 1 d'où elle part sur l'horizontale V_1.

On voit que le tracé des diverses courbes qui constituent une ligne figurative est, dès lors, facile à obtenir. Les limites utiles de ces courbes sont d'ailleurs données par les vitesses V_1, V_2 et v_1, v_2 qui caractérisent le régulateur employé et sont fournies, soit par l'expérience s'il s'agit d'un appareil existant, soit par le calcul s'il s'agit d'un projet.

En se reportant à ce qui a été dit plus haut (n° 3, du Chapitre I), on a ainsi un moyen simple de représenter par un tracé l'effet d'un appareil de régulation déterminé placé sur une machine donnée, quand les conditions initiales de marche ne sont pas celles qui sont compatibles avec l'état de régime permanent correspondant au travail utile à effectuer.

Ce tracé graphique fournit la plupart des éléments de la question; mais il est nécessaire, pour formuler les conditions sous lesquelles les oscillations à longues périodes ne peuvent se produire, d'obtenir l'expression analytique des divers éléments d'un cycle. Ce sera l'objet du Chapitre III.

CHAPITRE III.

CALCUL DES ÉLÉMENTS DE CHAQUE PORTION D'UN CYCLE. — PÉRIODES D'IMMOBILITÉ DE LA VANNE. — PÉRIODE DE FERMETURE. — PÉRIODE D'OUVERTURE.

Considérons une machine dans des conditions de résistance telles que la ligne de régime correspondante soit CD (*fig.* 11), et supposons que l'ouverture de la vanne et la vitesse initiales ne satisfont pas à cet état de régime.

La vitesse commence à varier, l'appareil de régulation entre en jeu et

l'on se propose de calculer les éléments du cycle relatif à cet état initial incompatible avec la constance du mouvement.

Ces divers éléments sont les suivants :

Pour les deux périodes d'immobilité de la vanne A 1 et 3,4 : la durée de la période et l'effet utile auquel elle correspond.

Pour les deux périodes de déplacement de la vanne 1, 2, 3 et 4, 5, 6 : la durée de la période; l'écart de vitesse qui s'y produit, c'est-à-dire les ordonnées des points 2 et 5; enfin l'effet utile.

Il est d'ailleurs évident que la position initiale considérée étant prise arbitrairement, les résultats obtenus s'appliquent à un cycle quelconque.

Nous considérerons séparément les quatre portions du cycle, et nous regarderons chacune d'elles comme définie par son point de départ sur l'horizontale d'où elle émane; le paramètre qui déterminera ainsi chaque période sera la distance, comptée horizontalement, du point de départ à la ligne de régime.

Dans le parcours du cycle étudié, la machine oscille en quelque sorte autour d'un certain état moyen défini par la vitesse moyenne de régime Ω égale à $\frac{V_1 + V_2 + v_1 + v_2}{4}$ et par l'ouverture $\mathcal{A}$ qui lui correspond sur la ligne de régime. Comme on n'a à examiner que de petites perturbations autour de cet état moyen, c'est lui qui doit fixer la valeur des différentes constantes à considérer. En particulier, c'est par rapport à cet état moyen qu'il faut calculer la quantité ρ, caractéristique mécanique de la machine. Quant à ε, c'est un nombre déterminé et constant qui résulte de l'agencement même du mécanisme de régulation.

1. — Période d'immobilité de la vanne a vitesse croissante.

Désignons par α_0 et v_1 les coordonnées du point initial (o) de cette période, point que nous supposons sur l'horizontale v_1, afin de ne spécifier en rien qu'il s'agit de la première période, et reprenons l'intégrale fondamentale (6)

$$(6) \qquad z = e^{-\int \frac{\Phi_1 \alpha \, d\theta}{I\Omega^3}} \int \left(\frac{\Psi_1}{I\Omega^2} - \frac{\Phi_1 \alpha}{I\Omega^3} \right) e^{\int \frac{\Phi_1 \alpha \, d\theta}{I\Omega^3}} \, d\theta,$$

que l'on peut écrire

$$(29)\qquad z = e^{-\frac{1}{2\rho}\int\frac{\alpha}{\mathcal{A}}d\theta}\int\frac{1}{2\rho}\left(1-\frac{\alpha}{\mathcal{A}}\right)e^{\frac{1}{2\rho}\int\frac{\alpha}{\mathcal{A}}d\theta}d\theta.$$

Puisque α est constant pendant la période considérée, cette formule devient

$$z = \frac{\mathcal{A}-\alpha_0}{\alpha_0} + Ce^{-\frac{1}{2\rho}\frac{\alpha_0}{\mathcal{A}}\theta},$$

et, si l'on convient de calculer les chemins parcourus θ à partir de l'origine de la période, on en déduit, z étant alors égal à $\frac{\Omega-\nu_1}{\Omega}$,

$$C = \frac{-\Omega\nu_1}{\Omega} - \frac{\mathcal{A}-\alpha_0}{\alpha_0},$$

ce qui donne

$$(30)\qquad z = \frac{\mathcal{A}-\alpha_0}{\alpha_0} + \left(\frac{\Omega-\nu_1}{\Omega} - \frac{\mathcal{A}-\alpha_0}{\alpha_0}\right)e^{-\frac{1}{2\rho}\frac{\alpha_0}{\mathcal{A}}\theta}.$$

Or, si l'on pose

$$\alpha_0 = \mathcal{A}(1+y),$$

l'expression de z devient

$$z = -\frac{y}{1+y} + \left(\frac{\Omega-\nu_1}{\Omega} + \frac{y}{1+y}\right)e^{-\frac{1+y}{2\rho}\theta}.$$

Mais, pour le but que nous nous proposons, qui est l'étude des oscillations à longues périodes, le cycle considéré est toujours assez resserré; y qui est positif est donc forcément petit et l'on peut, sans inconvénient pour la rigueur, le négliger vis-à-vis de l'unité dans la question qui nous occupe. On a ainsi

$$z = -y + \left(\frac{\Omega-\nu_1}{\Omega} + y\right)e^{-\frac{\theta}{2\rho}}$$

et, en se rappelant que, d'après la définition même de z,

$$\omega = \Omega(1-z),$$

on en conclut

$$\frac{\Omega - \omega}{\Omega} = -y + \left(\frac{\Omega - v_1}{\Omega} + y\right) e^{-\frac{\theta}{2\rho}}.$$

On déduit de là immédiatement la valeur limite de la vitesse dans la période d'immobilité de la vanne que l'on considère; si l'on remarque, en effet, que ω augmente constamment avec θ, car la quantité entre parenthèses est essentiellement positive, la vitesse atteint son maximum quand θ est infini, et ce maximum ω_1 est donné par

$$\omega_1 = \Omega(1 + y) = \Omega \frac{\alpha_0}{\mathcal{A}}.$$

Il n'est d'ailleurs réalisé théoriquement qu'après un chemin et, par suite, un temps infini.

Cette limite pouvait s'obtenir sans intégration; remarquons pour cela que, au moment où la vitesse cesse de croître, il y a équilibre entre la puissance et la résistance; on a, par suite,

$$\Phi_1 \alpha_0 = \Psi_1 \omega_1$$

et comme, d'autre part,

$$\Phi_1 \mathcal{A} = \Psi_1 \Omega,$$

on en déduit

$$\omega_1 = \Omega \frac{\alpha_0}{\mathcal{A}},$$

valeur précédemment trouvée.

Si cette limite est inférieure à la vitesse V_1 pour laquelle l'embrayage de fermeture se produit, l'équilibre est établi et l'état de régime est fixé.

La condition pour que la période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante suffise à rétablir l'équilibre est donc donnée par

$$\frac{\Omega \alpha_0}{\mathcal{A}} < V_1.$$

Mais, pour l'étude que nous faisons, nous devons supposer que cette

inégalité n'est pas satisfaite, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\Omega \alpha_0}{\mathcal{A}_1} > V_1.$$

Dans ce cas, on peut substituer à l'exponentielle qui figure dans l'expression de z les deux premiers termes, $1 - \frac{\theta}{2\rho}$, de son développement et écrire

$$z = -y + \left(\frac{\Omega - v_1}{\Omega} + y\right)\left(1 - \frac{\theta}{2\rho}\right)$$

ou encore

$$z = \frac{\Omega - v_1}{\Omega} - \frac{\theta}{2\rho}\,\frac{\Omega(1+y) - v_1}{\Omega},$$

relation qui est bien satisfaite au début de la période pour θ égal à zéro et z égal à $\frac{\Omega - v_1}{\Omega}$.

Il suffit alors, pour avoir la durée $\frac{\theta_1}{\Omega}$ de cette période, de remplacer dans l'égalité précédente z par $\frac{\Omega - V_1}{\Omega}$, valeur qui correspond à l'instant final de la période considérée. On a ainsi

$$\frac{\Omega - V_1}{\Omega} = \frac{\Omega - v_1}{\Omega} - \frac{\theta_1}{2\rho}\,\frac{\Omega(1+y) - v_1}{\Omega};$$

d'où l'on déduit, pour la durée de la période,

$$\frac{\theta_1}{\Omega} = \frac{2\rho(V_1 - v_1)}{\Omega[\Omega(1+y) - v_1]} = \frac{2\rho}{\Omega}\,\frac{V_1 - v_1}{\Omega\frac{\alpha_0}{\mathcal{A}_1} - v_1}. \tag{31}$$

Le premier des deux éléments que nous avions à calculer étant ainsi déterminé, cherchons maintenant quel est l'effet utile de la période.

Le rapprochement $\mathcal{R}_1$ défini comme nous l'avons dit (Chapitre I, n° 3), est, avec les notations portées sur la *fig.* 11,

$$0G - 1F = A_1 - a_1$$

ou encore, dans le triangle $\mathrm{GF}f$,

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(\mathrm{V}_1 - v_1). \tag{32}$$

2. — Période de fermeture de la vanne.

Le premier élément à obtenir, c'est l'expression du plus grand écart de vitesse toléré dans la période, écart que nous appellerons Z_1 et qui est représenté, en valeur absolue, par $\Omega - \mathrm{V}_1$, Ω étant toujours la vitesse correspondant au point 2.

Nous prendrons pour cela l'équation de la courbe de fermeture sous la forme (26) (Chapitre II, n° 8)

$$\frac{4\mathrm{A}\rho\varepsilon}{\Omega} z = \left(x + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{A}}{\Omega} z\right)^2.$$

Si l'on remplace dans cette formule z par Z_1, x par $\alpha_1 - \mathrm{A}$, coordonnées du point 1, avec le système d'axes $Z\,2\,X$, et si l'on substitue au rapport $\frac{\mathrm{A}}{\Omega}$ son égal $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}$, on obtient

$$\frac{4\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\rho\varepsilon Z_1 = \left(\alpha_1 - \mathrm{A} + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}} Z_1\right)^2;$$

or on voit immédiatement que

$$\mathrm{A} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(\mathrm{V}_1 + Z_1),$$

et l'on a ainsi deux relations qui permettent d'obtenir Z_1 quand on se donne l'état initial de la période, défini par α_1.

Comme Z_1 est toujours petit, il est possible de simplifier ces deux équations et d'en déduire

$$\frac{4\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\rho\varepsilon Z_1 = \left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\mathrm{V}_1\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\mathrm{V}_1\right)Z_1,$$

et, si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{4\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_1 = \left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{L}}{\Omega}V_1\right)\left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{L}}{\Omega}V_1 - \frac{4}{3}\frac{\mathcal{L}}{\Omega}Z_1\right),$$

on voit que, Z_1 étant négligeable vis-à-vis de V_1, on a

$$Z_1 = \frac{\left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{L}}{\Omega}V_1\right)^2}{4\frac{\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon}. \tag{33}$$

Quant à l'effet utile de cette période, il se calcule de la façon suivante :

Le rapprochement $\mathfrak{R}_2$ étant donné par 1 F — 3 E (*fig.* 11), qui peut se mettre sous la forme

$$\alpha_1 - A_1 - (A_2 - \alpha_3),$$

nous écrirons cette quantité

$$\mathfrak{R}_2 = (\alpha_1 - A) + (\alpha_3 - A) + 2A - A_1 - A_2;$$

mais on a, par l'équation même de la parabole de fermeture,

$$\alpha_1 - A = \quad 2\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_1} - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}}{\Omega}Z_1,$$

$$\alpha_3 - A = -2\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_2} - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}}{\Omega}Z_2,$$

formules dans lesquelles nous avons donné le signe positif au radical correspondant au point 1 situé, dans le système d'axes Z2X, du côté des x positifs, et le signe négatif au radical relatif au point 3, qui se trouve dans la région des x négatifs.

Mais on a, d'autre part,

$$A_1 = \frac{\mathcal{L}}{\Omega}V_1, \quad A_2 = \frac{\mathcal{L}}{\Omega}V_2;$$

on en déduit

$$\mathfrak{R}_2 = -\frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}}{\Omega}(Z_1 + Z_2)$$
$$+ 2\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left[\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2}\right] + 2\frac{\mathcal{L}}{\Omega}(V_1 + Z_1) - \frac{\mathcal{L}}{\Omega}(V_1 + V_2),$$

ce qui devient, si l'on tient compte de ce que $V_1 - V_2$ est égal à $Z_2 - Z_1$,

$$(34) \qquad \mathfrak{R}_2 = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(Z_1 + Z_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left[\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2}\right].$$

Enfin le dernier élément à calculer est la durée de la période; comme la vitesse varie en somme assez peu, il est permis de prendre, pour cette durée, le chemin parcouru divisé par la vitesse de régime.

Or le chemin parcouru a pour expression

$$\theta_3 - \theta_1 = \frac{\alpha_0 - \alpha_3}{\varepsilon},$$

que nous écrirons sous la forme

$$\frac{\alpha_1 - A}{\varepsilon} - \frac{\alpha_3 - A}{\varepsilon},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2}\right) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(Z_1 - Z_2)\right]$$

ou encore

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_1 - V_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2}\right)\right];$$

et l'on a ainsi, pour la durée de la période,

$$(35) \qquad \frac{\theta_3 - \theta_1}{\Omega} = \frac{1}{\varepsilon\Omega}\left[\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_1 - V_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2}\right)\right],$$

ce qui achève de déterminer tous les éléments de la période de fermeture de la vanne.

3. — Période d'immobilité de la vanne a vitesse décroissante.

Le calcul est tout à fait analogue comme marche à celui qui vient d'être fait au n° 1 pour la période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante; nous ne ferons donc que le mentionner d'une façon sommaire.

Les coordonnées du point initial de la période considérée sont α_3, V_2, celles du point final α_4, v_2 ; α_4 étant égal à α_3.

Or on a, par la formule (29),

$$z = e^{-\frac{1}{2\rho}\int\frac{\alpha}{\mathcal{A}}d\theta}\int\frac{1}{2\rho}\left(1-\frac{\alpha}{\mathcal{A}}\right)e^{\frac{1}{2\rho}\int\frac{\alpha}{\mathcal{A}}d\theta}d\theta;$$

on en déduit, puisque α conserve la valeur constante α_3,

$$z = \frac{\mathcal{A}-\alpha_3}{\alpha_3} + \mathcal{C}e^{-\frac{1}{2\rho}\frac{\alpha_3}{\mathcal{A}}\theta},$$

et, si l'on compte les chemins θ à partir de l'origine de la période, z est égal à $\frac{\Omega - V_2}{\Omega}$, quand θ est nul, ce qui donne

$$\mathcal{C} = \frac{\Omega - V_2}{\Omega} - \frac{\mathcal{A}-\alpha_3}{\alpha_3};$$

d'où l'on conclut

$$z = \frac{\mathcal{A}-\alpha_3}{\alpha_3} + \left[\frac{\Omega - V_2}{\Omega} - \frac{\mathcal{A}-\alpha_3}{\alpha_3}\right]e^{-\frac{1}{2\rho}\frac{\alpha_3}{\mathcal{A}}\theta}$$

et, en posant $\alpha_3 = \mathcal{A}(1-y')$,

$$z = \frac{y'}{1-y'} + \left[\frac{\Omega - V_2}{\Omega} - \frac{y'}{1-y'}\right]e^{-\frac{1-y'}{2\rho}\theta}$$

ou encore

$$z = y' + \left[\frac{\Omega - V_2}{\Omega} - y'\right]e^{-\frac{\theta}{2\rho}},$$

que l'on écrit

$$\frac{\Omega - \omega}{\Omega} = y' + \left[\frac{\Omega - V_2}{\Omega} - y'\right]e^{-\frac{\theta}{2\rho}}.$$

Il résulte de là que ω décroît constamment avec θ, car la quantité entre parenthèses est essentiellement négative; en conséquence, le minimum de ω est donné, pour θ infini, par la valeur

$$\Omega(1-y') = \Omega\frac{\alpha_3}{\mathcal{A}}.$$

Lorsqu'on a la condition

$$\Omega \frac{\alpha_3}{\mathcal{A}} > v_2,$$

la période d'immobilité considérée rétablit l'équilibre, sinon, à cette période succède une période d'ouverture de la vanne; dans ce cas, la durée $\frac{\theta_4 - \theta_3}{\Omega}$ s'obtient comme suit :

On a

$$z = \frac{\Omega - V_2}{\Omega} - \frac{\theta}{2\rho}\frac{\Omega(1-\gamma') - V_2}{\Omega};$$

d'où l'on conclut, pour z égal à $\frac{\Omega - v_2}{\Omega}$ et θ égal à $\theta_4 - \theta_3$,

$$\frac{\theta_4 - \theta_3}{\Omega} = \frac{2\rho}{\Omega} \frac{V_2 - v_2}{V_2 - \Omega \frac{\alpha_3}{\mathcal{A}}}. \tag{36}$$

Quant à l'effet utile, il est représenté par

$$\mathcal{R}_3 = 3E - 4H = A_2 - a_2 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_2 - v_2). \tag{37}$$

4. — Période d'ouverture de la vanne.

Le plus grand écart de vitesse toléré dans cette période est

$$z_2 = v_2 - \Omega';$$

or l'équation de la courbe d'ouverture étant

$$\frac{4A'\rho\varepsilon'}{\Omega'} z = \left(x - \frac{1}{3}\frac{A'}{\Omega'}z\right)^2,$$

on a, en remplaçant x et z respectivement par $\alpha_4 - A'$ et z_2 coordonnées du point 4,

$$\frac{4A'\rho\varepsilon'}{\Omega'} z_2 = \left(\alpha_4 - A' - \frac{1}{3}\frac{A'}{\Omega'}z_2\right)^2$$

avec

$$A' = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_2 - z_2);$$

on en déduit

$$\frac{4\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon' z_2 = \left(\alpha_4 - \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2\right)\left(\alpha_4 - \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2 + \frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2\right),$$

d'où

$$z_2 = \frac{\left(\alpha_4 - \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2\right)^2}{4\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon'}. \tag{38}$$

Quant à l'effet utile $\mathcal{R}_4$, représenté par $4\mathrm{H} - 6\mathrm{G}$, il est donné par

$$\mathcal{R}_4 = (a_2 - \alpha_4) - (\alpha_6 - a_1) = a_1 + a_2 - 2\mathrm{A}' - (\alpha_4 - \mathrm{A}') - (\alpha_6 - \mathrm{A}');$$

or on a

$$\alpha_4 - \mathrm{A}' = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2 - 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon' z_2},$$

$$\alpha_6 - \mathrm{A}' = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_1 + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon' z_1},$$

$$a_1 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_1,$$

$$a_2 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2,$$

et, par suite,

$$\mathcal{R}_4 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_1 + v_2) - 2\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_2 - z_2) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(z_1 + z_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon'}\left(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}\right),$$

ou encore

$$\mathcal{R}_4 = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(z_1 + z_2) - 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon'}\left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right). \tag{39}$$

Enfin la durée de la période $\frac{\theta_6 - \theta_4}{\Omega}$ est donnée par

$$\frac{\alpha_6 - \alpha_4}{\varepsilon'\Omega} = \frac{\alpha_6 - \mathrm{A}'}{\varepsilon'\Omega} - \frac{\alpha_4 - \mathrm{A}'}{\varepsilon'\Omega} = \frac{1}{\varepsilon'\Omega}\left[\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(z_1 - z_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon'}\left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}\right)\right]$$

ou encore

$$\frac{\theta_6 - \theta_4}{\Omega} = \frac{1}{\varepsilon'\Omega}\left[\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_1 - v_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon'}\left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}\right)\right]. \tag{40}$$

5. — Application des formules précédentes au cas très général où ε est égal a ε' et où les résistances qui s'opposent au mouvement de la vanne sont les mêmes a l'ouverture et a la fermeture.

Dans ce cas, qui correspond à la généralité des appareils de régulation, nous poserons

$$V_1 - V_2 = v_1 - v_2 = Z_2 - Z_1 = z_1 - z_2 = \delta,$$
$$V_1 - v_1 = V_2 - v_2 = \Delta;$$

les formules obtenues aux paragraphes précédents deviennent alors:

1° *Pour la période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante :*

(41)	Écart maximum de vitesse toléré...........	Δ
(42)	Durée de la période.......................	$\frac{2\rho}{\Omega}\frac{\Delta}{\Omega\frac{\alpha_0}{\mathcal{A}} - v_1}$
(43)	Effet utile...............................	$\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$

2° *Pour la période de fermeture de la vanne :*

(44)	Écart maximum de vitesse toléré......	$\frac{\left(\alpha_1 - \frac{\mathcal{A}}{\Omega}V_1\right)^2}{4\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = Z_1$
(45)	Durée de la période.................	$\frac{1}{\varepsilon\Omega}\left[\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\delta + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_1+\delta}\right)\right]$
(46)	Effet utile........................	$\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(2Z_1+\delta) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_1+\delta}\right)$

3° *Pour la période d'immobilité de la vanne à vitesse décroissante :*

(47)	Écart maximum de vitesse toléré...........	Δ
(48)	Durée de la période.......................	$\frac{2\rho}{\Omega}\frac{\Delta}{V_2 - \Omega\frac{\alpha_2}{\mathcal{A}}}$
(49)	Effet utile...............................	$\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$

4° *Pour la période d'ouverture de la vanne :*

(50) Écart maximum de vitesse toléré....... $\dfrac{\left(\alpha_4 - \dfrac{\mathcal{A}}{\Omega} v_2\right)^2}{4\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = z_2$

(51) Durée de la période.................. $\dfrac{1}{\varepsilon\Omega}\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\delta + 2\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_2 + \delta}\right)\right]$

(52) Effet utile.......................... $\dfrac{2}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}(2 z_2 + \delta) - 2\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{z_2 + \delta} - \sqrt{z_2}\right)$

6. — Simplification des formules dans le cas théorique où $V_1 = V_2$ et $v_1 = v_2$.

Le seul moyen de se rendre compte de la signification des résultats acquis jusqu'ici, c'est d'examiner le cas idéal où, les résistances à l'embrayage et au débrayage disparaissant, on aurait un appareil théoriquement parfait. On pourra ainsi apprécier l'influence de ces résistances et séparer ce qui est inhérent à l'appareil lui-même de ce qui provient des résistances accessoires qu'il met en jeu.

Nous supposerons donc

$$V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad v_1 = v_2,$$

c'est-à-dire

$$Z_1 = Z_2, \quad z_1 = z_2, \quad \delta = 0,$$

$$V_1 = \Omega + \frac{\Delta}{2}, \quad v_1 = \Omega - \frac{\Delta}{2};$$

on a ainsi :

1° *Pour la période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante :*

(53) Écart maximum de vitesse toléré.......... Δ

(54) Durée de la période...................... $\dfrac{2\rho}{\Omega}\,\dfrac{\Delta}{\Omega\dfrac{\alpha_0 - \mathcal{A}}{\mathcal{A}} + \dfrac{\Delta}{2}}$

(55) Effet utile.............................. $\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$

2° *Pour la période de fermeture de la vanne :*

(56) Écart maximum de vitesse toléré........... $\dfrac{\left(\alpha_1 - \mathcal{A} - \dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\dfrac{\Delta}{2}\right)^2}{4\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = Z_1$

(57) Durée de la période....................... $\dfrac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_1}$

(58) Effet utile.............................. $\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1$

3° *Pour la période d'immobilité de la vanne à vitesse décroissante :*

(59) Écart maximum de vitesse toléré........... Δ

(60) Durée de la période....................... $\dfrac{2\rho}{\Omega}\dfrac{\Delta}{\Omega\dfrac{\mathcal{A}-\alpha_3}{\mathcal{A}} + \dfrac{\Delta}{2}}$

(61) Effet utile.............................. $\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$

4° *Pour la période d'ouverture de la vanne :*

(62) Écart maximum de vitesse toléré........... $\dfrac{\left(\alpha_4 - \mathcal{A} + \dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\dfrac{\Delta}{2}\right)^2}{4\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = z_2$

(63) Durée de la période....................... $\dfrac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon z_2}$

(64) Effet utile.............................. $\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2$

Ces formules établies, nous examinerons dans le paragraphe suivant les conséquences qui en résultent.

7. — Conséquences relatives au cas de l'appareil idéal où les frottements seraient nuls. — Théorèmes.

Les périodes d'immobilité de la vanne, soit que l'on considère un appareil idéal où les frottements sont nuls, soit que l'on étudie un appareil pratique dans lequel δ n'est pas négligeable, ont toujours un effet utile

mesuré par $\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$, c'est-à-dire d'autant plus considérable qu'il y a un intervalle plus grand entre la vitesse d'embrayage de fermeture, par exemple, et la vitesse de débrayage d'ouverture. Ce résultat, qui était d'ailleurs assez évident *a priori*, constitue le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Dans un régulateur quelconque à action indirecte, les périodes d'immobilité de la vanne ont toujours un effet utile; cet effet utile est, pour chacune d'elles, d'autant plus considérable que* Δ *est plus grand.*

A ce point de vue, il y a donc intérêt à augmenter l'écart entre les vitesses théoriques de fermeture et d'ouverture.

Prenons maintenant les expressions de l'effet utile des périodes d'ouverture et de fermeture dans l'appareil sans frottement; cet effet utile, représenté par $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2$ ou $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1$ (formules 64 et 58), est toujours positif, tandis qu'il n'en est plus forcément de même pour un appareil où les frottements existent. Si l'on se reporte, en effet, à l'expression de cet effet utile, pour une période de fermeture, par exemple (formule 34),

$$\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(Z_1+Z_2)+2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}}\rho\varepsilon\left(\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_2}\right),$$

on voit immédiatement que, Z_1 étant inférieur à Z_2 et ces deux quantités étant petites par rapport à leurs racines, le second terme peut, lorsque Z_2-Z_1, c'est-à-dire δ, est suffisamment grand, l'emporter sur le premier et rendre ainsi l'expression totale négative.

On conçoit même qu'à partir d'une certaine valeur de δ l'effet nuisible des périodes de mouvement puisse dépasser l'effet utile des périodes d'immobilité et que l'on obtienne ainsi un cycle à effet total nuisible.

Il faut d'ailleurs remarquer que le terme négatif de l'expression précédente, s'annulant quand δ s'annule, représente l'influence sur l'effet utile de cette zone δ que l'on peut appeler la *zone de frottements* et qu'ainsi l'influence de cette zone a toujours pour résultat de diminuer l'effet utile de la période de mouvement considéré.

On peut, dès lors, énoncer le théorème qui suit :

THÉORÈME II. — *Dans l'appareil théorique où les frottements sont nuls tout cycle a un effet utile; s'il n'en est plus de même pour les appareils de la pratique, cela est dû à l'influence des zones de frottement qui ont pour résultat de diminuer l'effet utile et qui peuvent même le transformer en effet nuisible.*

On comprend par ce qui précède l'importance qu'acquièrent, dans l'étude que nous poursuivons, les résistances susceptibles de produire une différence entre les vitesses d'embrayage et de débrayage, c'est-à-dire susceptibles de changer de sens. Nous aurons à revenir sur ce point au Chapitre V.

L'expression trouvée pour l'effet utile d'une période de mouvement dans le cas de l'appareil théorique conduit enfin à une dernière remarque; cet effet utile est proportionnel à Z_1, c'est-à-dire à l'écart de vitesse qui se produit dans la période; de plus, on sait que l'on a

$$(33) \qquad Z_1 = \frac{\left(\alpha_1 - \frac{\mathfrak{A}}{\Omega} V_1\right)^2}{4 \frac{\mathfrak{A}}{\Omega} \rho \varepsilon} = \frac{(\alpha_1 - A_1)^2}{4 \frac{\mathfrak{A}}{\Omega} \rho \varepsilon},$$

ce qui donne, pour l'effet utile,

$$\frac{4}{3} \frac{\mathfrak{A}}{\Omega} Z_1 = \frac{1}{3} \frac{(\alpha_1 - A_1)^2}{\rho \varepsilon}.$$

Or $\alpha_1 - A_1$ est la différence entre l'ouverture de vanne au début de la période de fermeture considérée et celle qu'elle devrait avoir pour que l'équilibre fût établi à la même vitesse; c'est ce qu'on peut appeler l'écart de la vanne au début de la période. L'effet utile est donc proportionnel au carré de cet écart.

De plus, cet effet utile est inversement proportionnel à ρ et à ε; la quantité ε qui mesure le rapport entre le chemin élémentaire parcouru par la vanne et celui décrit par la machine est d'autant plus grande que l'appareil de commande de vannage est plus puissant. L'effet utile diminue par suite avec l'énergie du mécanisme.

Nous pouvons réunir ces diverses propriétés dans un énoncé unique :

THÉORÈME III. — *L'effet utile d'une période de mouvement, dans un régulateur sans frottement, est proportionnel à l'écart de vitesse qui se produit dans cette période; il varie en raison directe du carré de l'écart initial de la vanne et il est inversement proportionnel à l'énergie du mécanisme de commande du vannage.*

CHAPITRE IV.

DISCUSSION DU PROBLÈME. — ÉTUDE DES CYCLES SUCCESSIFS. — OSCILLATIONS A LONGUES PÉRIODES. — CONDITIONS POUR QU'ELLES NE SE PRODUISENT PAS.

L'étude qui vient d'être faite dans les Chapitres précédents et les résultats auxquels elle a conduit permettent de préciser le problème et d'en aborder la discussion.

Toute la question peut être ramenée aux termes suivants :

Une machine en état de régime, munie d'un appareil de régulation à action indirecte, subissant une perturbation, soit dans la puissance, soit dans la résistance, quel est l'état final vers lequel elle tend ?

Deux cas sont évidemment à distinguer, selon que l'appareil de régulation entre en jeu ou non.

Cette dernière hypothèse, où la vanne reste immobile, a été étudiée par le fait au n° 1 du Chapitre III. On a vu que la vitesse de la machine tendait constamment vers une certaine limite que, théoriquement, elle n'atteignait qu'après un temps infini.

Mais ce cas particulier n'a, en somme, aucun intérêt pratique, et le seul que l'on doive étudier est celui où la perturbation a une intensité suffisante pour mettre en jeu le régulateur.

Supposons donc ces conditions réalisées; on veut obtenir l'état final de la machine; or rien ne permet de dire *a priori* si cet état final est stable ou périodiquement variable. L'expérience s'est d'ailleurs prononcée à cet égard et a montré que les deux sont posssible.

Il faut même remarquer que, dans l'hypothèse d'un état final d'oscillations indéfinies, aucune raison n'existe de prime abord pour qu'on puisse savoir si cet état est plus voisin de l'uniformité qu'au début, c'est-à-dire si l'état de la machine s'est approché de l'uniformité.

Quant à la perturbation, quelle qu'en soit la nature, quel que soit le changement survenu dans les conditions de marche, elle se traduit toujours finalement par une disproportion entre la puissance et la résistance, disproportion telle que, pour la vitesse de régime, l'équilibre est impossible. En d'autres termes, les quatre quantités Φ, α, Ψ, ω ne vérifient plus l'équation

$$\Phi\alpha = \Psi\omega$$

après la perturbation.

De quelque façon donc que le problème se pose, que la perturbation affecte la puissance ou la résistance, que l'on ait débrayé des machines-outils ou que le niveau des eaux ait varié, que la variation éprouvée soit lente ou rapide, nous n'avons pas, pour l'étude spéciale des oscillations à longues périodes, à examiner les phases successives de la perturbation. Ce qui importe, c'est l'état de la machine quand cette perturbation vient de finir ou, plus exactement, quand la cause perturbatrice a cessé.

On se trouve ainsi simplement en présence d'une machine qui doit vaincre une résistance connue et déterminée, mais dont la vitesse et l'ouverture de vanne ne sont pas celles qui permettraient l'état de régime.

1. — Étude des cycles successifs constituant la ligne figurative correspondant a une perturbation.

Théorème I. — *Deux courbes de déplacement quelconques, appartenant ou non à une même ligne figurative, ne se coupent jamais à moins de coïncider.*

Cette propriété, qui est fondamentale, résulte immédiatement de l'équation différentielle des courbes de déplacement

$$\frac{\gamma^2}{2}\frac{dz}{d\alpha} = \alpha - \mathrm{A} + \alpha z, \tag{13}$$

équation qui donne une seule valeur de $\frac{dz}{d\alpha}$ en chaque point, ce qui montre que l'on ne saurait avoir en un point deux directions différentes pour la tangente.

Il résulte de là que deux lignes figuratives quelconques ne peuvent jamais avoir de point commun et que, si l'on considère les divers cycles qui composent une même ligne figurative, ils ne se coupent jamais.

On en conclut immédiatement que les différents cycles correspondant à une ligne figurative s'enveloppent toujours sans se rencontrer, et l'on peut énoncer dès lors le théorème suivant, qui conduira à des conséquences importantes :

Théorème II. — *Les divers cycles d'une même ligne figurative vont toujours en s'épanouissant ou en se concentrant.*

On voit de suite, par ce théorème, que s'il existe un cycle fermé représentant l'état final de la machine à la suite d'une perturbation, les cycles successifs qui constituent la ligne figurative de cette perturbation s'en rapprochent indéfiniment, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur, puisqu'ils ne peuvent se couper entre eux ou couper le cycle fermé limite.

Si donc l'état de la machine converge d'une manière continue vers un certain état limite et si la ligne figurative correspondante comporte une ligne asymptotique, on peut affirmer que cette ligne figurative va toujours en s'en rapprochant.

Il faut d'ailleurs remarquer que, lorsqu'il existe un état asymptotique ou, si l'on veut, lorsque l'état final est représenté par un cycle fermé, la machine ne peut arriver à cet état qu'au bout d'un temps infini, puisque chaque cycle exige un temps fini pour être parcouru et qu'il y a, comme on vient de le voir, un nombre infini de cycles.

Les diverses propriétés qui précèdent se résument comme suit :

THÉORÈME III. — *Les amplitudes d'oscillation de la vanne et de la vitesse vont constamment en diminuant ou constamment en augmentant, ou enfin restent invariables, ce qui correspond au cas du cycle fermé, c'est-à-dire des oscillations indéfinies. Elles ne peuvent jamais diminuer à un moment pour croître à un autre ou réciproquement.*

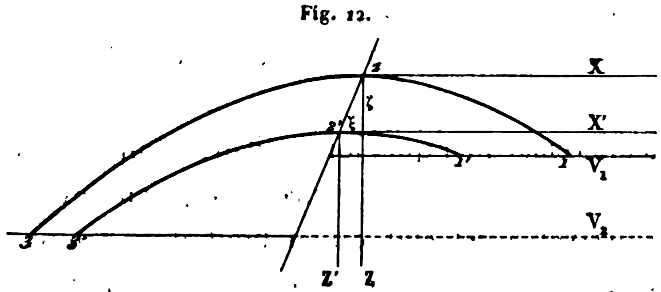
Il résulte de ce que nous venons de dire que, dès qu'un cycle quelconque d'une ligne figurative a un effet utile par exemple, tous les cycles constituant la même ligne ont aussi un effet utile. L'examen d'un seul cycle suffit ainsi pour faire connaître si la ligne figurative relative à une perturbation tend vers l'état final en se concentrant ou en s'épanouissant, c'est-à-dire si le mouvement se régularise ou si, au contraire, ses irrégularités vont en croissant.

THÉORÈME IV. — *Les cycles successifs d'une même ligne figurative vont toujours en se rapprochant les uns des autres.*

Il est nécessaire de bien spécifier le sens de ce théorème. Nous voulons démontrer que la distance des points extrêmes d'un cycle, comptée sur l'horizontale qui les réunit, va en diminuant d'un cycle au suivant. Ceci revient à dire que l'effet utile ou nuisible des cycles successifs d'une même ligne figurative diminue d'une façon continue. Maximum au début, il décroît régulièrement et il tend vers zéro lorsque, l'état final de la machine étant représenté par un cycle fermé, le temps augmente indéfiniment.

Considérons (*fig.* 12) les deux paraboles de fermeture correspondant

Fig. 12.



à deux cycles successifs d'une même ligne figurative; l'équation de la pa-

rabole 1, 2, 3, rapportée aux axes X 2 Z est

$$x + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}} z = \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}} z}, \tag{26}$$

dans laquelle on prend le signe positif devant le radical pour les points de la branche 1, 2 et le signe négatif pour les points de la branche 2, 3.

L'équation de la parabole 1′, 2′, 3′, rapportée aux mêmes axes, est, en désignant par $-\xi$ et ζ les coordonnées du sommet 2′,

$$x' + \xi + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}(z' - \zeta) = \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}(z' - \zeta)}. \tag{65}$$

Si, dans les deux équations (26) et (65), on fait z égal à z' pour comparer les points de départ des deux paraboles situés sur une même horizontale, on a

$$x - x' - \xi + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}\zeta = \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{z} - \sqrt{z - \zeta}\right),$$

et comme

$$\xi = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}\zeta,$$

on en déduit

$$x - x' = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}\zeta + \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{z} - \sqrt{z - \zeta}\right).$$

On a donc, pour les branches 1, 2 et 1′, 2′,

$$x_1 - x'_1 = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}\zeta + \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\frac{\zeta}{\sqrt{z} + \sqrt{z - \zeta}}, \tag{66}$$

la quantité $x_1 - x'_1$ étant positive dans l'hypothèse faite sur la situation relative des deux paraboles considérées, et cela, quel que soit z, puisque deux courbes quelconques de déplacement ne se coupent pas.

On a de même, pour les branches 2, 3 et 2′, 3′, x_2 et x'_2 étant négatifs,

$$x'_2 - x_2 = -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{Q}}\zeta + \sqrt{\frac{4\mathcal{B}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\frac{\zeta}{\sqrt{z + \delta} + \sqrt{z + \delta - \zeta}}, \tag{67}$$

$z+\delta$ représentant la valeur de z qui correspond à l'horizontale à laquelle se terminent les paraboles.

La quantité $x'_3 - x_3$ qui mesure la distance des deux paraboles à leurs points d'arrivée, lorsqu'on définit cette distance comme nous l'avons dit, est essentiellement positive; si on la compare à la distance des paraboles au point de départ $x_1 - x'_1$, positive aussi, on reconnaît qu'elle est plus petite que cette dernière, et cela pour deux raisons. D'une part, le terme $\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\zeta$ est négatif; d'autre part, le dénominateur de la fraction $\frac{\zeta}{\sqrt{z}+\sqrt{z-\zeta}}$ a été augmenté par la substitution à z de $z+\delta$.

Le théorème est donc démontré du moment que les points d'arrivée des deux paraboles sont au même niveau, ou à un niveau plus bas que leurs points de départ; or cette dernière condition est forcément réalisée lorsqu'on prend les courbes entières qui, parties de l'horizontale V_1 correspondant à la vitesse d'embrayage de fermeture, aboutissent à l'horizontale V_2 relative à la vitesse de débrayage et située plus bas, comme nous l'avons supposé.

Il faut remarquer ici que ce théorème n'exige en rien qu'il s'agisse de deux cycles d'une même ligne figurative, et il reste évidemment vrai pour deux cycles quelconques appartenant à des lignes figuratives différentes.

THÉORÈME V. — *Il ne peut jamais y avoir qu'un seul cycle fermé, quel que soit l'état initial.*

En effet, imaginons que pour deux états initiaux on obtienne deux cycles fermés, et qu'il n'y en ait pas dans l'intervalle, ce qu'on peut toujours admettre sans introduire aucune hypothèse restrictive. Prenons un état initial compris entre les deux cycles précédents, et supposons tracée la ligne figurative qui y correspond; cette ligne ne peut présenter un cycle fermé intermédiaire aux deux cycles fermés considérés, puisqu'il n'en existe pas; elle rétablit donc l'équilibre au bout d'un nombre fini de spires, ou elle a pour ligne asymptotique l'un des deux cycles ou tous les deux. Quelle que soit celle de ces hypothèses qui est réalisée, les divers cycles qui forment la ligne figurative considérée ont tous un effet utile

ou tous un effet nuisible. Dans le premier cas, chaque spire est à l'intérieur de celle qui la précède et, comme les cycles successifs vont en se rapprochant quand le temps augmente, on voit que, si l'on parcourt la ligne figurative en sens inverse, les spires s'écartent de plus en plus; cette ligne figurative, ainsi parcourue, devrait donc s'épanouir indéfiniment, ce qui est incompatible avec l'existence du cycle fermé extérieur qu'elle ne peut franchir.

Si, au contraire, les cycles successifs ont un effet nuisible, la ligne figurative, parcourue dans le sens direct, s'épanouit; les spires s'enveloppent en se rapprochant, et il suffit de décrire cette ligne figurative en sens inverse pour voir que, les cycles ainsi décrits s'écartant de plus en plus, l'existence du cycle fermé intérieur est impossible.

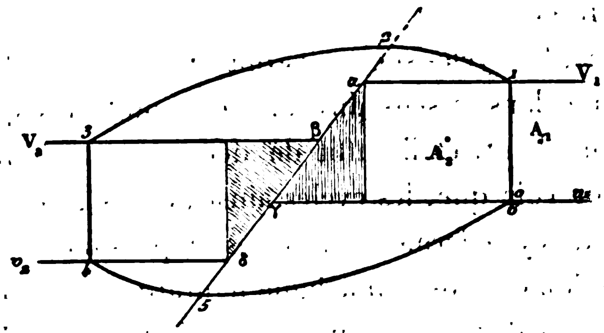
En un mot, si l'on considère une ligne figurative quelconque prolongée indéfiniment dans les deux sens, on sait, par le théorème IV, qu'il y en a toujours un pour lequel la distance des spires va en croissant; or cela suffit pour prouver qu'il ne saurait jamais y avoir deux cycles fermés, puisqu'il serait impossible, dans la zone annulaire séparant ces deux cycles, de tracer une ligne figurative dont les spires successives satisfassent à cette condition.

Il résulte de cette propriété que, lorsqu'il existe un cycle fermé, il n'en existe qu'un seul, et que ce cycle, complètement indépendant de l'état initial de la machine, est la ligne asymptotique de toutes les lignes figuratives quand on les parcourt dans le sens convenable. Les unes, parties de l'extérieur, vont en se concentrant et se rapprochant indéfiniment de lui; les autres, situées à l'intérieur, vont au contraire en s'épanouissant. Ce fait a un sens mécanique sur lequel nous devrons insister, mais il est nécessaire auparavant que nous donnions la signification pratique du cycle fermé pris en lui même.

2. — Propriétés du cycle fermé.

Imaginons qu'il y ait un cycle fermé et représentons ce cycle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (*fig.* 13), l'état initial de la machine peut être figuré par un

Fig. 13.



point extérieur ou un point intérieur. Nous examinerons successivement ces deux cas :

1° *Point extérieur,* A_1 par exemple. Les cycles successifs décrits à partir de A_1 étant assujettis à tendre vers le cycle fermé et ayant tous un effet utile ou tous un effet nuisible, on voit que ce sera forcément l'effet utile qui se produira. L'appareil de régulation agira donc, dans ce cas, pour régulariser véritablement en ce sens que, par son action, l'amplitude des oscillations diminuera. Mais il est bien clair que l'état de régime ne pourra jamais s'établir, puisqu'il faut pour cela que l'une des verticales des cycles rencontre la portion αγ de la ligne de régime quand la vanne s'élève, ou la portion βδ quand elle s'abaisse, ce qui est impossible, les cycles successifs ne pouvant franchir le cycle fermé. On arrivera donc, au bout d'un temps théoriquement infini, à l'état d'oscillations indéfinies, mais toujours identiques, que représente le cycle fermé.

2° *Point intérieur,* A_2 par exemple. Ce point est supposé à l'extérieur des triangles ombrés de la figure; car sans cela la verticale du cycle, issue de ce point, rencontrerait la ligne de régime en un point, tel que l'équilibre serait établi dès la première période, et le régulateur n'entrerait pas en jeu.

Les cycles successifs, décrits à partir du point A_2, auront tous un effet nuisible ; le régulateur aura augmenté les écarts de vitesse et l'on tendra encore vers l'état d'oscillations indéfinies correspondant au cycle fermé.

Nous devons ici faire une remarque, pour le cas où l'état initial de la machine est représenté par un point situé à l'intérieur des deux triangles ombrés. Ainsi que nous l'avons dit, la machine arrive alors immédiatement à l'état de régime sans intervention du régulateur ; mais, si une cause étrangère venait à mettre ce régulateur en mouvement, il pourrait naître certaines oscillations que le tracé de l'épure ferait toujours aisément connaître. Il serait même possible de voir se produire l'état d'oscillations indéfinies correspondant au cycle fermé.

La discussion qui précède montre que, en dehors de l'état de régime qui ne peut se réaliser que par l'intersection d'une verticale d'un cycle avec la ligne de régime, c'est-à-dire que, lorsque le régulateur n'est pas en action, le seul état stable compatible avec le fonctionnement du régulateur est constitué par le cycle fermé. C'est toujours, en effet, vers cet état que tend la machine, lorsqu'un de ces cycles existe et que l'on considère une perturbation suffisante pour mettre le régulateur en jeu.

Ce fait explique les phénomènes qui résultent de l'existence du cycle fermé et rend compte ainsi de la production des oscillations à longues périodes.

Toute la question est donc ramenée à fixer les conditions sous lesquelles il n'y aura pas de cycle fermé.

3. — Détermination du cycle fermé. — Conditions pour qu'il n'existe pas.

Prenons un cycle quelconque 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (*fig.* 11) ; nous allons exprimer tout d'abord que α_2 est égal à α_4, ce qui est une condition commune à tous les cycles, puis nous exprimerons, d'autre part, que α_1 est égal à α_6, ce qui sera la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle soit fermé.

Calculons donc les quatre quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$.

Si l'on désigne par x_1 l'abscisse du point 1 dans le système de coordonnées $Z\,2\,X$, on a

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_1 + Z_1) + x_1,$$

mais l'équation de la parabole 1, 2, 3 étant, dans ce système d'axes,

$$x + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} z = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega} z},$$

on en déduit

$$x_1 = -\frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} Z_1 + \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega} Z_1};$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_1 + Z_1) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} Z_1 + \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega} Z_1}. \tag{68}$$

On obtient de même

$$\alpha_2 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_2 + Z_2) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} Z_2 - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega} Z_2}. \tag{69}$$

Un procédé identique appliqué à la parabole d'ouverture

$$x - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} z = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon'}{\Omega} z}$$

donne les deux relations

$$\alpha_4 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_2 - z_2) + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} z_2 - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon'}{\Omega} z_2}, \tag{70}$$

$$\alpha_6 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(v_1 - z_1) + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega} z_1 + \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon'}{\Omega} z_1}. \tag{71}$$

En égalant les valeurs de α_2 et α_4 données par les équations (69) et (70), on a

$$\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_2 - v_2) + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(Z_2 + z_2) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho}{\Omega}}\left(\sqrt{\varepsilon Z_2} - \sqrt{\varepsilon' z_2}\right) = 0 \tag{72}$$

et, par l'égalité de α_1 et de α_6, on obtient

$$(73)\quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(V_1 - v_1) + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(Z_1 + z_1) + \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{\varepsilon Z_1} - \sqrt{\varepsilon' z_1}\right) = 0.$$

Ces deux équations (72) et (73) représentent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que le cycle soit fermé; si l'on suppose que ε est égal à ε' et que $V_2 - v_2$ est égal à $V_1 - v_1$, elles deviennent, en conservant les notations Δ et δ déjà employées,

$$(74)\quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\Delta + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(Z_2 + z_2) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{Z_2} - \sqrt{z_2}\right) = 0,$$

$$(75)\quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\Delta + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(Z_2 + z_2) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{Z_2 - \delta} - \sqrt{z_2 + \delta}\right) = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on déterminera les deux inconnues conservées Z_2 et z_2, c'est-à-dire les points 2 et 5 et, par suite, le cycle fermé, puisque la connaissance de ces deux points suffit pour qu'on puisse le tracer.

Mais ce qui importe, c'est moins d'obtenir le cycle fermé, lorsqu'il y en a un, que de savoir s'il existe ou s'il n'existe pas, puisqu'on se propose avant tout d'éviter sa production. Les deux équations (74) et (75) ou, si l'on se place dans le cas le plus général, les deux équations (72) et (73) auxquelles on adjoindra

$$V_1 - V_2 = Z_2 - Z_1, \quad v_1 - v_2 = z_1 - z_2,$$

permettront de reconnaître l'existence du cycle fermé.

Il faudra que les valeurs trouvées pour les deux inconnues conservées, Z_2 et z_2 par exemple, soient positives.

Mais il sera plus aisé, pour éviter toute résolution d'équation, de voir simplement si l'expression $\alpha_1 - \alpha_6$, c'est-à-dire

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\Delta + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(Z_2 + z_2) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{Z_2 - \delta} - \sqrt{z_2 + \delta}\right),$$

est susceptible de passer du positif au négatif. En pratique même on peut

se borner à constater que $\alpha_1 - \alpha_6$ n'est pas négatif dans le cas le plus défavorable; il faut bien admettre en effet que tout régulateur existant régularise dans certaines conditions et que par suite $\alpha_1 - \alpha_6$ a toujours des valeurs positives.

En résumé donc, on exprimera que $\alpha_1 - \alpha_6$ est positif dans le cas le plus défavorable, et l'on aura ainsi exprimé qu'il n'y a pas de cycle fermé.

Or, si l'on considère un cycle utile, et il en existe toujours d'après ce qui vient d'être dit, on sait que la distance des cycles successifs va en diminuant (Chap. IV, n° 1, th. IV); on se rapprochera donc du cas le plus défavorable en faisant avancer le point 1 vers le point F (*fig.* 11); dès lors, la position limite de ce point, correspondant à ce cas, sera précisément le point F. On voit bien d'ailleurs que si, pour cette position du point 1, le cycle extrême ainsi obtenu a un effet utile, il en sera de même pour tous les cycles précédents, puisque, si on les parcourt en sens inverse à partir du cycle extrême, leur effet nuisible va en croissant, ce qui est incompatible avec l'existence d'un cycle fermé.

Sous une autre forme, on peut dire que si le plus petit cycle a un effet utile fini, tous les autres, à quelque ligne figurative qu'ils appartiennent, ont un effet utile plus grand que celui-là et par conséquent fini, que, par suite, le nombre des cycles d'une ligne figurative correspondant à une perturbation donnée ne peut jamais être infini et qu'il n'y a pas de cycle fermé.

Nous supposons donc le point 1 au point F, ce qui donne

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = V_1 - V_2,$$

et nous écrivons que le premier membre de l'équation (73) est positif.

On a ainsi

$$\frac{\mathcal{M}}{\Omega}\left[V_1 - v_1 + \frac{2}{3}(v_1 - v_2)\right] > -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\Omega}z_2 + \sqrt{\frac{4\mathcal{M}\rho\varepsilon'}{\Omega}(z_2 + v_1 - v_2)}, \tag{76}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathcal{M}}{\Omega}\left[V_1 - v_2 - \frac{V_1 - V_2}{3}\right] - \sqrt{\frac{4\mathcal{M}\rho\varepsilon}{\Omega}(V_1 - V_2)} \\ &\quad = -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\Omega}z_2 - \sqrt{\frac{4\mathcal{M}\rho\varepsilon'}{\Omega}z_2}, \end{aligned}\right. \tag{77}$$

ce qui peut s'écrire, lorsque ε est égal à ε' et $V_1 - v_1$ égal à $V_2 - v_2$,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\left(\Delta + \frac{2}{3}\delta\right) + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}} z_2 > \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\mathcal{Q}}(z_2 + \delta)}, \tag{78}$$

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\left(\Delta + \frac{2}{3}\delta\right) + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}} z_2 = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}o\varepsilon}{\mathcal{Q}}}\left(\sqrt{\delta} - \sqrt{z_2}\right). \tag{79}$$

Il suffit alors de tirer z_2 de cette dernière équation et de le porter dans l'inégalité précédente pour trouver la condition de la non-existence d'un cycle fermé.

4. — Oscillations a longues périodes. — Condition pour qu'elles ne se produisent pas.

En rapprochant les divers résultats qui viennent d'être obtenus, on reconnaît que la production des oscillations à longues périodes est intimement liée à l'existence d'un cycle fermé. En effet, quand ce cycle existe, on retrouve tous les phénomènes qui caractérisent ces oscillations. Pour de grands écarts d'état de régime, le mouvement commence bien à se régulariser, mais cette régularisation va en diminuant, elle devient nulle et la machine reste dans cet état stable d'oscillations de la vanne et de la vitesse qui correspond au cycle fermé. Pour des perturbations assez petites, mais suffisantes cependant pour mettre en jeu l'appareil de régulation, les irrégularités du mouvement vont en croissant et elles augmentent jusqu'à prendre la valeur qui caractérise les oscillations indéfinies dues au cycle fermé.

On voit ainsi que, sauf pour les petites perturbations telles que l'équilibre peut se rétablir sans que le régulateur entre en jeu, l'état de régime ne saurait reprendre naissance sous l'action de cet appareil lorsqu'il existe un cycle fermé; des oscillations indéfinies se produisent forcément, oscillations qui sont d'ailleurs toujours les mêmes, quelle que soit la perturbation, et l'adjonction du régulateur devient ainsi, en quelque sorte, pour le mouvement, une cause d'irrégularité.

Dans ce cas, il n'est pas permis d'espérer pour la machine une vitesse

constante dès qu'elle est exposée à des variations tant soit peu notables dans la puissance ou la résistance, et l'on est certain de voir se produire cet état oscillatoire dans lequel la vitesse et l'ouverture de la vanne varient périodiquement entre des limites plus ou moins écartées, en repassant toujours par les mêmes phases.

Un pareil état, en dehors même de l'usure qu'il produit dans l'appareil de régulation, est la plupart du temps inadmissible, et c'est une chose importante, comme l'ont reconnu tous les praticiens, que de l'éviter; la théorie que nous venons de faire nous en donne les moyens, puisqu'il suffit de satisfaire aux relations (78) et (79); nous allons voir, dans le Chapitre suivant, les applications pratiques de ce résultat.

CHAPITRE V.

CONSÉQUENCES PRATIQUES. — APPLICATION AUX RÉGULATEURS EXISTANTS. — RÈGLES A SUIVRE POUR ÉVITER QU'ILS PERMETTENT DES OSCILLATIONS A LONGUES PÉRIODES.

L'étude des conséquences qui résultent, pour les applications, de la théorie exposée dans les Chapitres précédents et l'examen des règles pratiques qui s'en déduisent doivent être divisés en deux parties. Deux problèmes distincts peuvent, en effet, se poser : dans l'un, il s'agit des appareils de régulation ordinairement employés et l'on se propose d'étudier leur fonctionnement, de chercher à quelles conditions ils auront une action régulatrice efficace et de déterminer la marche à suivre pour leur établissement; dans l'autre, on ne s'assujettit plus à conserver le type ordinaire des régulateurs existants et l'on veut obtenir le principe d'appareils nouveaux qui ne soient plus exposés aux oscillations à longues périodes.

Nous examinerons successivement ces deux faces de la question, et la première fera l'objet du présent Chapitre.

Pour la clarté de cette recherche, et pour mettre en lumière l'influence de la zone des frottements dont nous avons déjà signalé l'importance, nous traiterons d'abord le cas idéal et relativement simple d'un régulateur sans frottement. Ce cas lui-même sera divisé en deux parties, afin de nous permettre d'apprécier l'effet du non-isochronisme; nous étudierons successivement le régulateur isochrone et le régulateur non isochrone.

1. — Régulateur sans frottement. — Cas de l'isochronisme.

Imaginons un appareil de régulation sans frottement; les résistances qui s'opposent à l'embrayage et au débrayage ayant disparu, ces deux mouvements se produisent pour la même vitesse de la machine, c'est-à-dire que les vitesses V_1 et V_2 sont égales, ainsi que v_1 et v_2. Si l'on suppose de plus que le régulateur est isochrone, ces quatre vitesses deviennent les mêmes, la zone que nous avons désignée par Δ disparaît, les portions verticales des cycles n'existent plus et ces derniers se trouvent ainsi réduits aux paraboles de fermeture et d'ouverture, comme l'indique la *fig.* 14.

En se reportant alors aux résultats obtenus dans le n° 6 du Chapitre III, on obtient, lorsqu'on y fait Δ égal à zéro :

1° *Pour la période de fermeture de la vanne :*

(80) Écart maximum de vitesse toléré........... $\dfrac{(\alpha_1 - \mathcal{A})^2}{4\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = Z_1$

(81) Durée de la période....................... $\dfrac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_1}$

(82) Effet utile.............................. $\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1$

2° *Pour la période d'ouverture de la vanne :*

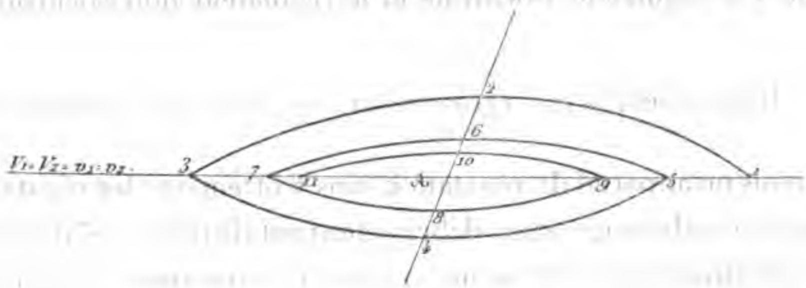
(83) Écart maximum de vitesse toléré........... $\dfrac{(\alpha_2 - \mathcal{A})^2}{4\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = z_2$

(84) Durée de la période....................... $\dfrac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon z_2}$

(85) Effet utile.............................. $\dfrac{4}{3}\dfrac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2$

On voit, par les formules (82) et (85), ainsi que cela pouvait être conclu d'ailleurs du théorème II démontré au n° 7 du Chapitre III, qu'il y a toujours effet utile et que, dès lors, il ne saurait y avoir de cycle fermé à proprement parler; les spires successives vont en se rapprochant indéfini-

Fig. 14.



ment du seul point qui corresponde pour la machine à un état de régime stable, c'est-à-dire du point $\mathcal{A}$, intersection de la ligne de régime avec l'horizontale $V_1 v_1$, de telle sorte que ce point joue le rôle d'un cycle fermé évanouissant et constitue ainsi un point asymptotique pour les spires des cycles; il est bien clair en effet que, par la nature même de ces cycles, aucun d'eux ne peut passer par le point $\mathcal{A}$, à moins d'y avoir l'un de ses sommets, tel que le point (2) par exemple. Ceci va résulter encore du calcul que nous allons faire.

Proposons-nous de déterminer comment varient les écarts de vitesse et les ouvertures de vanne après chaque portion du cycle.

Pour cela, considérons la courbe de fermeture 1, 2, 3 et désignons par

$$\alpha_1 = \mathcal{A}(1 + y)$$

l'ouverture de vanne correspondant au point 1 origine de la courbe de fermeture.

Nous venons d'établir que l'écart maximum de vitesse toléré dans cette période est

$$(80) \qquad Z_1 = \frac{(\alpha_1 - \mathcal{A})^2}{4\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon} = \frac{\mathcal{A}\Omega}{4\rho\varepsilon} y^2.$$

Quant à l'effet utile, il est

$$(82)\qquad \frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1 = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}^2}{\rho\varepsilon}y^2.$$

On voit que l'effet utile est de l'ordre de y^2 et qu'il est ainsi petit par rapport à y; le rapprochement n'est donc jamais qu'une petite fraction de l'écart, et la position d'équilibre $\mathcal{A}$ ne peut être atteinte qu'après un nombre infini de spires.

Ainsi se trouve démontré ce fait que nous avions reconnu précédemment, savoir que le point $\mathcal{A}$ constitue un point asymptotique pour les spires successives; il importe maintenant de reconnaître si le temps nécessaire à cette évolution est fini ou infini.

Or, si l'on suppose que la première période du premier cycle est une période de fermeture, ce qui, ainsi que nous l'établirons plus loin, ne particularise en rien la question, on sait que la durée de cette période est représentée par

$$(81)\qquad \frac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon Z_1},$$

et comme l'on a, d'après ce qui précède,

$$(80)\qquad y = \sqrt{\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{A}\Omega}Z_1},$$

on en déduit pour la durée de cette période

$$(86)\qquad \frac{2\mathcal{A}}{\varepsilon\Omega}y.$$

Pour avoir la durée de la période suivante, qui est une période d'ouverture, nous poserons de même

$$\alpha_4 = \mathcal{A}(1 - y_1),$$

et l'on aura pour cette durée

$$(84)\qquad \frac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon z_2},$$

avec la condition

$$z_2 = \frac{(\mathcal{L} - \alpha_1)^2}{4\frac{\mathcal{L}}{\Omega}\rho\varepsilon} = \frac{\mathcal{L}\Omega}{4\rho\varepsilon} y_1^2, \tag{87}$$

ce qui donne

$$\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon\Omega} y_1. \tag{88}$$

On voit que la durée d'une période quelconque, qu'elle soit d'ouverture ou de fermeture [formules (86) et (88)], est donnée par la même expression $\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon\Omega} y$, où l'on remplace y par la valeur de l'expression $\frac{\alpha - \mathcal{L}}{\mathcal{L}}$ correspondant à l'origine de cette période. Ceci suffit pour prouver que l'on n'a introduit aucune restriction en supposant que la première période considérée était une période de fermeture.

Toute la question est donc ramenée en somme à calculer les valeurs successives de $y_1, y_2, \ldots$, pour les diverses périodes et à les substituer dans l'expression

$$\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon\Omega}(y + y_1 + y_2 + \ldots),$$

qui représente la durée totale de l'évolution faite par la machine dans le parcours de toutes les spires.

Or on a établi que l'effet utile de la première période, représenté sur la *fig.* 14 par la différence des longueurs $1\mathcal{L}$ et $3\mathcal{L}$, était donné par l'expression $\frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}^2}{\rho\varepsilon} y^2$; mais ces longueurs sont mesurées respectivement, d'après la définition même de y, par $\mathcal{L}y$ et $\mathcal{L}y_1$; on a donc

$$\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}^2}{\rho\varepsilon} y^2$$

ou encore

$$y_1 = y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{L}}{\rho\varepsilon} y\right),$$

et le temps de la seconde période est ainsi

$$\frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon\Omega} y_1 = \frac{2\mathcal{L}}{\varepsilon\Omega} y - \frac{\Omega}{6\rho}\left(\frac{2\mathcal{L}y}{\varepsilon\Omega}\right)^2.$$

D'une façon générale nous allons montrer que, si l'on appelle u_n la durée de la $n^{\text{ième}}$ période, celle de la période suivante est

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\Omega}{6\rho} u_n^2.$$

En effet, pour la $n^{\text{ième}}$ période, on a

$$y_{n-1} = \frac{\varepsilon \Omega}{2\mathcal{A}} u_n,$$

mais la différence des écarts de la vanne correspondant au début de la $n^{\text{ième}}$ période et à celui de la $(n+1)^{\text{ième}}$, $\mathcal{A}y_{n-1} - \mathcal{A}y_n$, est, en valeur absolue,

$$\mathcal{A}y_{n-1} - \mathcal{A}y_n = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{A}^2}{\rho\varepsilon} y_n^2;$$

on en déduit

$$y_n = y_{n-1}\left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{A}}{\rho\varepsilon} y_{n-1}\right),$$

et la durée de la $(n+1)^{\text{ième}}$ période est ainsi

$$u_{n+1} = \frac{2\mathcal{A}}{\varepsilon \Omega} y_{n-1}\left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{A}}{\rho\varepsilon} y_{n-1}\right) = u_n - \frac{\Omega}{6\rho} u_n^2.$$

En total donc, nous sommes amené à rechercher si la somme indéfinie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

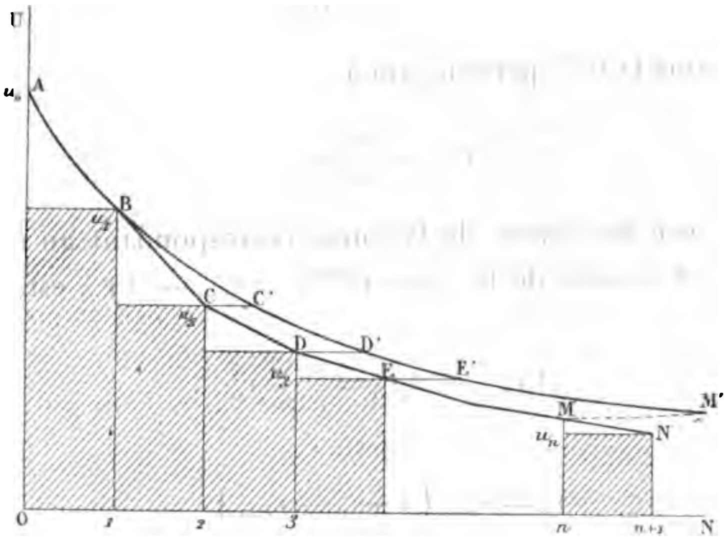
est finie ou infinie lorsque les termes successifs sont liés par la loi suivante :

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 - \frac{\Omega}{6\rho} u_1^2, \\
u_3 &= u_2 - \frac{\Omega}{6\rho} u_2^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_{n+1} &= u_n - \frac{\Omega}{6\rho} u_n^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour faire cette recherche, portons en abscisses les valeurs de n et en

ordonnées les valeurs correspondantes de u_n (*fig.* 15); nous formerons ainsi une ligne polygonale B, C, D, ...; cette ligne polygonale sera tout

Fig. 15.



entière au-dessus de l'axe des n, car les durées $u_1, u_2, \ldots$ des périodes successives sont toujours positives; d'autre part, cette ligne B, C, D, ... sera convexe du côté de ON, car le coefficient angulaire d'un des côtés du polygone est donné par

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{1} = -\frac{\Omega}{6\rho} u_n^2,$$

et il décroît continuellement, puisque la quantité u_n, d'après sa loi même de formation, va constamment en décroissant.

La quantité à évaluer est représentée par la somme des surfaces des rectangles ombrés sur la figure.

Imaginons représentée la courbe qui a pour équation différentielle

$$\frac{du}{dn} = -\frac{\Omega}{6\rho} u^2,$$

et qui passe par le point B de coordonnées $n = 1$, $u = u_1$; cette courbe est l'hyperbole

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_1} = \frac{\Omega}{6\rho}(n - 1). \tag{89}$$

Le coefficient angulaire de la tangente au point M′ où cette hyperbole est coupée par l'horizontale $u = u_n$ est

$$-\frac{\Omega}{6\rho}u_n^2 = \frac{u_{n+1} - u_n}{1};$$

la tangente en M′ est donc parallèle au côté MN de la ligne polygonale correspondant aux ordonnées u_n et u_{n+1}.

Il résulte de là que l'hyperbole considérée, partant du point B tangentiellement à BC, est tout entière au-dessus du polygone, mais il est facile, en choisissant convenablement le coefficient de n dans l'équation (89), de trouver une autre hyperbole qui, partant comme la première du point B et asymptote comme elle à l'axe des n, laisse le polygone entièrement au-dessus d'elle, ce qui suffira pour prouver que l'aire de ce polygone, c'est-à-dire la durée totale cherchée, est infinie.

Considérons, en effet, l'hyperbole

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_1} = \lambda(n-1), \tag{90}$$

dans laquelle λ est un coefficient arbitraire dont nous déterminerons ensuite la grandeur par la condition indiquée.

Si l'on coupe cette courbe par les horizontales M et N, correspondant aux ordonnées u_n et u_{n+1}, les abscisses des points d'intersection ont pour différence

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right);$$

et la droite qui joint ces deux points a pour inclinaison sur l'axe des n

$$\frac{\lambda(u_{n+1} - u_n)}{\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}} = -\lambda u_n u_{n+1} = -\lambda u_n^2\left(1 - \frac{\Omega}{6\rho}u_n\right).$$

L'inclinaison du côté correspondant de la ligne polygonale étant, comme l'on sait, égale à $-\frac{\Omega}{6\rho}u_n^2$, il suffit de poser, quel que soit u_n,

$$\lambda\left(1 - \frac{\Omega}{6\rho}u_n\right) > \frac{\Omega}{6\rho},$$

pour que l'hyperbole considérée soit tout entière au-dessus du polygone.

On écrira dès lors

$$\lambda > \frac{\Omega}{6\rho} - \frac{1}{1 - \frac{\Omega}{6\rho} u_n},$$

condition qui sera satisfaite pour toutes les valeurs de u_n du moment où elle le sera pour u_1, car les valeurs de u vont en décroissant.

Il est donc possible, en déterminant λ par la condition précédente, de trouver des hyperboles qui, issues du point d'origine B de la ligne polygonale et asymptotes à l'axe des n, la laissent entièrement au-dessus d'elles ; l'aire totale que nous voulions évaluer est par suite infinie, et le temps employé par la machine au parcours des spires successives est lui-même infini.

Ainsi, *lorsqu'on considère un appareil de régulation où les frottements sont nuls et dans lequel l'appareil à boules est isochrone, la vitesse de la machine, après une perturbation quelconque, converge bien vers la vitesse de régime, mais elle ne peut l'atteindre qu'après un temps théoriquement infini, après avoir exécuté une série infinie d'oscillations autour de cette vitesse de régime, oscillations dont l'amplitude va constamment en décroissant.*

2. — Régulateur sans frottement, mais non isochrone.

Supposons maintenant que l'effort demandé à l'appareil à boules, pour la mise en jeu du mécanisme de commande du vannage, est toujours assez faible pour que les vitesses relatives au débrayage et à l'embrayage puissent être regardées comme égales, ce qui correspond au cas idéal de l'absence de frottement; supposons de plus que le régulateur n'est pas isochrone, c'est-à-dire que les vitesses théoriques d'ouverture et de fermeture sont différentes.

On a ainsi

$$V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad v_1 = v_2$$

et, avec les notations du Chapitre III, n° 6,

$$Z_1 = Z_2, \quad z_1 = z_2, \quad \delta = 0,$$
$$V_1 = \Omega + \frac{\Delta}{2}, \quad v_1 = \Omega - \frac{\Delta}{2}.$$

L'effet utile des périodes d'immobilité de la vanne est, comme nous l'avons vu, pour chacune d'elles $\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$; celui d'une période d'ouverture est $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2$, celui d'une période de fermeture $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1$; on a donc, en total, pour l'effet utile d'un cycle,

$$(91) \qquad 4\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\left[\frac{\Delta}{2} + \frac{Z_1 + z_2}{3}\right].$$

Cet effet utile étant toujours positif, on reconnaît que la vitesse de la machine converge forcément vers la zone de vitesses qui constitue les états possibles de régime, c'est-à-dire vers la portion de la ligne de régime comprise entre les horizontales V_1 et v_1; il est facile de démontrer que le nombre des périodes décrites avant la réalisation de cet état final est nécessairement limité.

En effet, les périodes d'immobilité de la vanne produisant un rapprochement fini et constant mesuré pour chacune par $\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$, le nombre des périodes est forcément inférieur au quotient $\frac{\alpha_0 - a_0}{2\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta}$ que l'on obtient, en divisant l'écart initial par le double de l'effet utile d'une période d'immobilité, puisque les périodes d'ouverture et de fermeture ont toujours un effet utile.

Ainsi, par exemple, si l'écart relatif Δ des vitesses V_1 et v_1 correspondant à l'ouverture et à la fermeture du vannage est de 2 pour 100, et si l'on considère une perturbation produite par une variation de 20 pour 100 dans l'ouverture du vannage et, par suite, dans la grandeur de la puissance, l'état de régime est atteint au bout de cinq cycles au plus, car $\frac{\alpha_0 - a_0}{2\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta}$ est alors égal à 5.

Le nombre des périodes ainsi décrites avant l'établissement de l'état de régime diminuera à mesure que l'effet utile des périodes de mouvement du vannage ira en croissant; or cet effet utile, mesuré respectivement pour l'ouverture et la fermeture par $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2$ et $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_1$, est proportionnel à l'écart de vitesse toléré pendant la période, de telle sorte qu'on ne peut augmenter cet effet utile qu'en produisant simultanément un écart de vitesses plus considérable.

C'est là un fait important et qui ne doit pas être perdu de vue, lorsqu'on étudie les régulateurs à action indirecte. *Pour un appareil théoriquement parfait où les frottements seraient nuls, lorsque l'effet utile augmente, les écarts de vitesse augmentent aussi, de telle sorte qu'on ne peut diminuer le nombre des oscillations effectuées par la vanne pour atteindre l'état de régime après une perturbation, qu'au détriment de la constance de la vitesse de la machine.*

En somme, dans les régulateurs à action indirecte, en dehors de la zone des vitesses pour lesquelles l'appareil à boules n'entre pas en jeu, zone qui représente les vitesses possibles de régime, il y a à distinguer les écarts de vitesse qui se produisent pour la machine pendant le fonctionnement même de l'appareil de régulation. C'est là une donnée qui doit toujours entrer en ligne de compte quand on se propose d'établir un régulateur de ce genre, car ces accroissements de vitesse, pour être accidentels, n'en peuvent pas moins exercer une influence sur le travail produit par la machine et entraîner des inconvénients; ils constituent un genre spécial d'irrégularités, inhérent en quelque sorte à l'appareil de régulation lui-même et d'autant plus intéressant à considérer que l'on est conduit naturellement à en augmenter l'importance, lorsqu'on cherche à diminuer le nombre des oscillations de la vanne. Aussi conviendrait-il de limiter *a priori* ces écarts de vitesse par la considération de la nature du travail à effectuer, exactement comme on limite par cette considération les écarts de vitesse que doivent comporter les volants; c'est par cette étude préalable que, dans tout projet d'installation d'un régulateur à action indirecte, les dimensions de l'appareil devraient être tout d'abord fixées.

Il faut d'ailleurs remarquer que, puisqu'on ne peut diminuer les écarts dont il s'agit, même dans le cas idéal du régulateur parfait, qu'en augmentant le nombre des oscillations de la vanne, il y a là deux intérêts contraires dont il est nécessaire de peser l'importance relative. C'est précisément cette discussion qui devra, dans chaque cas particulier, servir de base à l'établissement du régulateur.

La théorie que nous avons faite donne tous les éléments de cette discussion. Pour restreindre l'amplitude des écarts, il faut rendre le mouvement de la vanne plus rapide, c'est-à-dire augmenter ε; mais les formules que nous avons données permettent toujours de se rendre compte de l'effet produit, de voir dans quelles limites on a augmenté le nombre des oscillations du vannage et de déterminer à quel point il convient de s'arrêter. Si l'on suppose, en effet, ε infiniment grand, les mouvements de la vanne deviennent instantanés, les paraboles d'ouverture et de fermeture s'aplatissent indéfiniment, les écarts de vitesse sont nuls dans les périodes de mouvements, et l'effet de ces périodes est simplement de faire passer brusquement la vanne de part et d'autre du point à atteindre sans l'en rapprocher, puisque, Z_1 et z_2 étant nuls, l'effet utile des périodes considérées s'annule aussi. Dans ce cas, le nombre des cycles complets est alors exactement $\dfrac{\alpha_0 - a_0}{2\dfrac{A}{\Omega}\Delta}$.

Mais, dans la pratique, ε a toujours une valeur finie, et la grandeur de cette quantité est une des variables dont on dispose. Pour un certain nombre d'industries, ce qu'il importe avant tout d'assurer, c'est que, par suite des perturbations auxquelles on est exposé et que l'on doit supposer connues, la vitesse ne dépasse pas une limite maxima fixée *a priori*. Le problème, dans ces conditions, se pose alors de la façon suivante : disposer le mécanisme de régulation de telle sorte que, pour une perturbation donnée, l'écart maximum de vitesse, c'est-à-dire celui qui se produit dans le premier cycle, reste inférieur à une valeur donnée.

Or, l'écart des vitesses pour le premier cycle est égal à la quantité Δ, distance des horizontales V_1 et v_1, augmentée des écarts qui prennent naissance pendant les périodes de déplacement. Deux moyens se présentent

dès lors pour diminuer cette somme : le premier s'obtient par l'aplatissement des paraboles d'ouverture et de fermeture, ce qui se réalise pratiquement en rendant le mécanisme de commande du vannage plus énergique et, par suite, en augmentant ε; le second consiste à diminuer Δ, c'est-à-dire à rapprocher les vitesses d'embrayage et de débrayage, tout en leur laissant cependant une différence suffisante pour que le régulateur n'empiète pas sur les fonctions du volant.

Pour permettre la discussion du choix à faire et pour fixer la solution à adopter, il importe de rechercher lequel de ces deux procédés opère un rapprochement donné dans le moindre temps, la variation de vitesse étant d'ailleurs supposée la même dans les deux cas. Nous allons procéder à cette recherche.

Soient α l'ouverture de vanne initiale et A l'ouverture qui correspond à la même vitesse sur la ligne de régime. Considérons d'abord la période de fermeture; le rapprochement est, comme nous l'avons vu (Chapitre III, n° 6) $\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z$, la durée de la période est $\frac{4}{\varepsilon\Omega}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon Z}$, ce qui donne pour le chemin parcouru $4\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\frac{\rho}{\varepsilon}Z}$; le rapprochement par unité de chemin parcouru est donc, pour cette première période,

$$\frac{\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z}{4\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\frac{\rho}{\varepsilon}Z}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mathcal{A}\varepsilon}{\rho}\frac{Z}{\Omega}}. \tag{92}$$

Prenons maintenant la période d'immobilité de la vanne qui succède à la précédente; le rapprochement y est $\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\Delta$, et nous devrons y remplacer Δ par Z pour exprimer que l'écart de vitesse est le même dans les deux cas. Quant au chemin parcouru, il est $2\rho\dfrac{Z}{\Omega\frac{\alpha - A}{\mathcal{A}} + \frac{Z}{2}}$; or, d'après l'équation même de la parabole de fermeture, on a

$$\alpha - A = 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\rho\varepsilon Z} - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z;$$

on en déduit, pour le chemin parcouru,

$$(92)\qquad \frac{\rho\sqrt{Z}}{\sqrt{\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{A}}\rho\varepsilon}+\frac{1}{12}\sqrt{Z}}$$

et, par suite, le rapprochement par unité de temps est donné, dans la période d'immobilité considérée, par

$$(94)\qquad \frac{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}Z\left(\sqrt{\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{A}}\rho\varepsilon}+\frac{1}{12}\sqrt{Z}\right)}{\rho\sqrt{Z}}=\sqrt{\frac{\mathcal{A}\varepsilon}{\rho}\frac{Z}{\mathcal{Q}}}+\frac{1}{12\rho}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}Z.$$

Il suffit de rapprocher cette quantité de l'expression (92) obtenue dans la période précédente pour constater que l'effet utile, par unité de temps, d'une période d'immobilité, est toujours supérieur, pour un même écart de vitesse, à celui qui correspond à la période de mouvement.

A ce point de vue, on est conduit à préférer le procédé de limitation des écarts de vitesse par l'augmentation de ε à celui qui consiste à diminuer Δ, puisqu'on n'abaisse pas ainsi l'effet utile de la période la plus puissante pour éteindre les oscillations.

Dans cet ordre d'idées, on choisira donc un mécanisme de commande du vannage énergique, avec un appareil de régulation à vitesses de fermeture et d'ouverture notablement écartées, de préférence à un système, correspondant au même écart maximum de vitesse, mais à mécanisme de commande moins puissant et à vitesse de fermeture et d'ouverture plus rapprochées. Dans le premier, les oscillations de la vanne s'éteindront plus vite, mais les écarts de vitesse, toujours un peu supérieurs à Δ, seront, pour chaque cycle, très voisins de leur plus grande valeur; dans le second, au contraire, les oscillations seront plus longues à disparaître, mais les écarts de vitesse s'abaisseront, immédiatement après le premier cycle, bien au-dessous du maximum. En un mot, on aura, dans le premier cas, des oscillations peu nombreuses, mais des écarts de vitesse restant notables pendant presque toute leur durée, tandis que, dans le second, on

aura plus d'oscillations, mais des écarts de vitesse de la machine s'affaiblissant très rapidement.

Or il ne faut pas oublier que la plupart du temps une variation accidentelle de vitesse, lorsqu'elle n'est pas trop considérable, a moins d'importance pratique que des variations plus petites, mais permanentes, de la vitesse de régime. Il ne faudrait donc pas exagérer l'écart qui existe entre les vitesses de fermeture et d'ouverture, car, s'il est vrai que l'on permettrait ainsi à la machine de revenir vite à l'état de régime après une perturbation accidentelle, on augmenterait en même temps l'écart des vitesses entre lesquelles elle oscille normalement.

Il y a là une discussion à faire dans chaque cas particulier, d'après les conditions spéciales où l'on se trouve et la nature du travail à effectuer.

3. — Régulateurs ordinaires en tenant compte du frottement.

L'étude des régulateurs sans frottement qui vient d'être faite dans les paragraphes précédents a mis en évidence les propriétés intrinsèques du mécanisme qui constitue les régulateurs à action indirecte; nous allons examiner maintenant quelles sont les modifications qu'introduit dans ces appareils le frottement qu'on ne peut jamais supprimer et nous pourrons ainsi, par cette marche successive dans l'examen des divers éléments du problème, apprécier leur importance relative et connaître les propriétés des régulateurs de la pratique.

Reprenons pour cela le cycle de la *fig.* 11, par exemple, et considérons la courbe de fermeture 1, 2, 3 qui coupe en 3′ l'horizontale V_1; l'effet utile de la portion 1, 2, 3′ est

$$\frac{4}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}Z_1$$

(Chap. III, n° 6) et l'effet utile de la période complète 1, 2, 3 est

$$\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}(Z_1+Z_2)+2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{Q}}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1}-\sqrt{Z_2}\right),$$

(Chap. III, n° 2, formule 34); or il est facile de voir que l'on a toujours

$$\frac{4}{3}\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Q}}Z_1 > \frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Q}}(Z_1 + Z_2) + 2\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Q}}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2}\right);$$

en effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Q}}(Z_2 - Z_1) < 2\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Q}}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_1}\right)$$

ou encore, puisque Z_2 est supérieur à Z_1, et que γ^2 est égal à $4\mathcal{M}\rho\varepsilon$,

$$\frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{Z_1}{\mathcal{Q}}} + \sqrt{\frac{Z_2}{\mathcal{Q}}}\right) < 1. \tag{95}$$

Cette condition est évidemment toujours satisfaite; car, en admettant même que $\frac{Z_1}{\mathcal{Q}}$ et $\frac{Z_2}{\mathcal{Q}}$ puissent atteindre la valeur $\frac{1}{4}$, ce qui permettrait à la machine de passer de 100 tours, par exemple, à 150 tours par minute pendant une oscillation complète du régulateur, le premier membre de l'inégalité (95) deviendrait $\frac{2}{3}\frac{\mathcal{M}}{\gamma}$ et il suffirait que $\frac{\mathcal{M}}{\gamma}$ fût inférieur à 1,5 pour que cette inégalité fût satisfaite. Or nous savons que $\frac{\mathcal{M}}{\gamma}$ ne dépasse guère l'unité.

On reconnaît ainsi que l'effet utile d'une période de mouvement est toujours diminué par l'action de la zone de frottement δ, et l'on peut énoncer le théorème suivant, dont les conséquences pratiques seront importantes :

Pour les régulateurs à action indirecte l'effet des résistances qui s'opposent à la mise en jeu ou à la cessation des embrayages de fermeture et d'ouverture est de diminuer l'effet utile des périodes de mouvement.

Il faut, d'ailleurs, remarquer que l'on doit comprendre, dans les résistances nuisibles dont nous venons de parler, toutes celles qui sont susceptibles d'établir une différence entre les vitesses d'embrayage et de débrayage et qui rendent celle-ci plus petite que la première pour la fermeture et plus grande pour l'ouverture.

Ces résistances, en diminuant l'effet utile d'une période de mouvement,

peuvent, si elles acquièrent une importance suffisante, amener cet effet utile à devenir négatif et, par suite, peuvent donner lieu à un effet nuisible pour la période considérée; il suffit, pour cela, que l'on ait

$$\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}(Z_1+Z_2)-2\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_2}-\sqrt{Z_1}\right)<0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(96)\qquad \frac{4}{3}\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}Z_1-\left[2\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_2}-\sqrt{Z_1}\right)-\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}\delta\right]<0.$$

Le premier terme $\frac{4}{3}\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}Z_1$ est l'effet utile que produirait la période de déplacement considérée s'il n'y avait pas de frottements, c'est-à-dire si δ était nul; la quantité entre crochets représente donc la diminution d'effet utile due à la zone de frottements; nous sommes certains que cette quantité est toujours positive, car il vient d'être établi que l'effet utile de la période diminuait par suite des résistances à l'embrayage et au débrayage; nous allons montrer qu'elle croît avec δ.

Dans ce but, mettons-la sous la forme

$$\sqrt{\rho\varepsilon}\left(\sqrt{Z_1+\delta}-\sqrt{Z_1}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}}\,\delta,$$

après suppression des facteurs constants.

La dérivée par rapport à δ est

$$\frac{\sqrt{\rho\varepsilon}}{2\sqrt{Z_1+\delta}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{Q}}};$$

elle est décroissante avec δ et s'annule lorsque $\sqrt{\frac{Z_1+\delta}{\mathfrak{Q}}}$ est égal à $\frac{3}{4}\frac{\Upsilon}{\mathfrak{h}}$, valeur qui ne saurait jamais être atteinte, puisqu'elle exigerait que $\sqrt{\frac{Z_2}{\mathfrak{Q}}}$ soit voisin de l'unité. La dérivée est donc positive, à coup sûr, dans l'étendue considérée, et la quantité étudiée est croissante avec δ.

Ainsi les résistances passives, comprises comme il a été dit plus haut, ont pour résultat constant de diminuer l'effet utile des périodes de mouvement et elles le diminuent d'autant plus qu'elles sont elles-mêmes plus

considérables; elles peuvent ainsi, dans certaines conditions, annihiler l'effet utile des périodes d'immobilité de la vanne, amener même un effet total nuisible et sont capables, en conséquence, de provoquer des oscillations à longues périodes.

On voit nettement, par ce qui précède, l'importance fondamentale qu'acquiert, au point de vue de la production des oscillations à longues périodes, la zone δ correspondant aux frottements. Dans l'appareil théorique sans frottements, on était toujours sûr d'arriver à l'état de régime, par un nombre limité d'oscillations, pourvu que le régulateur ne fût pas isochrone (Chap. V, § 2); dans l'appareil pratique à frottements on n'en est plus assuré. Ceci montre bien que *les oscillations à longues périodes ne sont pas inhérentes au régulateur lui-même, que le principe de l'appareil à action indirecte est bon en soi et que les inconvénients qu'il présente sont uniquement dus aux résistances passives inévitables qui prennent naissance lorsqu'il fonctionne.*

Nous venons de dire que l'influence nuisible de la zone δ pouvait surpasser l'effet utile des périodes d'immobilité correspondant à la zone de hauteur Δ qui sépare V_1 de v_1; pour que ce fait ne se produise pas, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait pas d'oscillations à longues périodes, il faut donc que δ soit suffisamment petit par rapport à Δ; nous sommes ainsi conduit à reconnaître que la production de ces oscillations dépend uniquement de la relation de grandeur entre δ et Δ et nous devons chercher quelle condition analytique doit exister entre ces deux quantités pour que les oscillations indéfinies ne puissent naître.

Pour rendre plus clairs les résultats qui précèdent, pour faire bien comprendre la manière dont agit un régulateur à action indirecte et mettre en lumière l'importance de la zone Δ, nous allons indiquer diverses applications numériques à des cas que nous choisirons de façon à rendre plus saillantes les conclusions auxquelles nous sommes arrivé.

Nous avons considéré une machine qui fait en moyenne 50 tours par minute, dont l'ouverture moyenne de la vanne est de 200^{mm} et qui est susceptible de faire $156^t,25$ par sa seule inertie lorsque toutes les résistances sont supprimées.

Cette machine a un appareil de commande du vannage réglé de façon à faire avancer la vanne de un demi-millimètre par tour.

Il en résulte que, ε étant égal à 0,50 et ρ à 156,25, le rapport $\frac{A}{\gamma}$ a pour valeur 0,8.

D'autre part, les résistances à l'embrayage et au débrayage sont telles que $\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$, et l'écart initial de la vanne est de 85^{mm} par rapport à la position correspondant à l'équilibre.

Avec ces données, on a supposé successivement

$$\frac{\Delta}{\Omega} = 0,10, \quad \frac{\Delta}{\Omega} = 0,06, \quad \frac{\Delta}{\Omega} = 0.$$

On a obtenu alors les cycles représentés dans les *fig.* 16, 18 et 20 (1).

---

(1) Ces calculs se rapportent à un projet de modification du régulateur de la grande turbine installée à la Poudrerie du Pont-de-Buis.

Cette turbine, établie par M. Schabaver, conduit six usines à poudre, dont cinq paires de meules, plus un atelier de réparations; le régulateur qu'elle porte donne des oscillations indéfinies et je me suis proposé d'appliquer les théories de ce travail pour montrer comment devrait être modifiée l'installation.

Les expériences ont été faites par M. Bérard, Ingénieur en chef des Poudres, Directeur de la Poudrerie, avec lequel j'étudie actuellement les applications pratiques aux mécanismes du service des Poudres des résultats auxquels je suis parvenu. Cette étude fera l'objet d'un Mémoire subséquent publié en collaboration.

La turbine dont il s'agit actionne une transmission par câbles télédynamiques fort lourde, de telle sorte que, si l'on supprime brusquement l'arrivée de l'eau, au moment où, toutes les usines étant embrayées, la vitesse moyenne est réalisée, l'arbre fait encore $126^t,25$.

La vitesse moyenne de cet arbre est de 50 tours par minute.

L'ouverture de la vanne se mesure à l'aide d'un cadran extérieur horizontal où se meut une aiguille en relation directe avec cette vanne; l'ouverture moyenne est de $0^m,20$ environ et les perturbations auxquelles on est exposé peuvent exiger un surcroît ou une diminution d'ouverture de $0^m,085$.

Quant à l'appareil de régulation, son défaut est d'être trop peu énergique et trop isochrone : de là les oscillations. Comme les boules sont très lourdes (elles pèsent 30^{kg} chacune), j'ai pensé que l'on pouvait arriver à opérer l'embrayage et le débrayage avec un $\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$ et j'ai essayé successivement les deux valeurs $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{10}{100}$ et $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{6}{100}$; puis enfin $\frac{\Delta}{\Omega} = 0$.

Le calcul a été fait dans ces trois cas en appliquant les principes exposés dans ce Mémoire et ce sont ses résultats qui sont consignés dans les Tableaux suivants. Ils montrent à la fois comment l'on peut éviter les oscillations indéfinies et comment aussi ces oscillations prendraient naissance avec un régulateur trop isochrone.

Dans le premier cas (*fig.* 16), l'équilibre se rétablit; dans le second, (*fig.* 18), il y a oscillations indéfinies; dans le troisième, enfin (*fig.* 20), qui correspond au cas de l'isochronisme, il se produit encore des oscillations indéfinies, mais d'un caractère un peu différent de celui des précédentes.

Les périodes d'immobilité ayant disparu dans ce dernier cas, la vanne ne reste jamais en repos, contrairement à ce qui se passe dans le deuxième.

Nous avons joint à chacune des trois lignes figuratives représentées dans les *fig.* 16, 18 et 20 les tracés graphiques obtenus en prenant les temps pour abscisses et les vitesses pour ordonnées (*fig.* 17, 19 et 21); dans chacun de ces tracés les courbes marquées P et relatives aux périodes de mouvement de la vanne sont des paraboles, tandis que les arcs L correspondant aux périodes d'immobilité sont des logarithmiques.

Pour ne pas compliquer outre mesure les tracés 17, 19 et 21, nous n'y avons pas représenté les ouvertures de la vanne, que fournissent d'ailleurs les Tableaux numériques joints à chaque figure.

DONNÉES NUMÉRIQUES. Cas de $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{10}{100}$, correspondant aux *fig.* 16 et 17.	TEMPS.	OUVERTURE de vanne.	VITESSE.
	′ ″	mm	t
	0.0	295	52,40
Échelle des vitesses (10^{mm} par tour).	2.50	227	57,00
Échelle des ouvertures de vanne (grandeur naturelle).	6.20	144	52,20
	8.35	144	47,20
Échelle des temps ($6^{mm},25$ par minute).	10.30	184	46,00
Écart initial de la vanne (85^{mm}).	12.25	232	47,40
	16.00	232	52,40
Vitesse moyenne de la machine ($\Omega = 50$ tours par minute).	16.55	212	53,00
Ouverture moyenne de la vanne ($\mathcal{A} = 200^{mm}$).	18.00	183	52,20
	26.25	183	47,20
Caractéristique du mécanisme de commande du vannage ($\varepsilon = \frac{5}{10}$).	26.35	189	47,15
Caractéristique de la machine ($\rho = 156^t,25$).	27.30	208	47,40
	30.00	208	49,00
$\frac{A}{\gamma} = \frac{8}{10}$.	35.00	208	50,40
	40.00	208	51,20
$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$.	∞	208	52,00

DONNÉES NUMÉRIQUES. Cas de $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{6}{100}$, correspondant aux *fig.* 18 et 19.	TEMPS.	OUVERTURE de vanne.	VITESSE.
	′ ″	mm	t
	0.0	292	51,40
Échelle des vitesses (10^{mm} par tour).	2.55	223	56,05
	6.25	141	51,20
	7.50	141	48,20
Échelle des temps (grandeur naturelle).	9.40	187	47,30
	11.55	239	48,40
Échelle des temps (6^{mm},25 par tour).	13.40	239	51,40
	14.50	209	52,30
	16.20	172	51,20
Écart initial de la vanne (85^{mm}).	19.15	172	48,20
	20.00	192	48,00
Vitesse moyenne de la machine (Ω = 50 tours par minute).	21.20	220	48,40
	25.00	207	51,50
	25.50	184	51,20
Ouverture moyenne de la vanne ($\mathcal{A}$ = 200^{mm}).	26.50	184	48,20
	32.10	193	48,15
Caractéristique du mécanisme de commande du vannage ($\varepsilon = \frac{5}{10}$).	32.30	214	48,40
	39.00	214	51,40
	39.30	206	51,50
Caractéristique de la machine (ρ = 156^{t},25).	40.20	187	51,20
	46.15	187	48,20
$\frac{A}{\gamma} = \frac{8}{10}$, $\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$.	46.50	194	48,15
	47.30	212	48,40

Cas de l'isochronisme.

DONNÉES NUMÉRIQUES. Cas de $\frac{\Delta}{\Omega} = 0$ correspondant aux *fig.* 20 et 21.	TEMPS.	OUVERTURE de vanne.	VITESSE.
	′ ″	mm	t
	0. 0	285	50,10
	2.45	218	54,30
Échelle des vitesses (10^{mm} par tour).	6.10	134	49,50
	8.20	134	47,10
	10.50	190	50,10
	12.45	254	52,10
Échelle des ouvertures de vanne (grandeur naturelle).	15.00	254	49,50
	16.40	208	48,20
	18.40	153	50,10
Échelle des temps ($6^{mm},25$ par minute).	20.20	153	51,30
	22.10	193	49,50
	23.40	244	48,40
Écart initial de la vanne (85^{mm}).	25.25	244	50,10
	26.50	206	51,20
	28.35	159	49,50
Vitesse moyenne de la machine ($\Omega = 50$ tours par minute).	29.55	159	48,50
	31.40	195	50,10
	32.55	239	51,15
Ouverture moyenne de la vanne ($\mathcal{A} = 200^{mm}$).	34.40	239	49,50
	35.55	205	48,50
	37.35	162	50,10
Caractéristique du mécanisme de commande du vannage ($\varepsilon = \frac{5}{10}$).	38.55	162	51,10
	39.30	196	49,50
	40.45	237	48,50
Caractéristique de la machine ($\rho = 156^{t},25$).	42.25	237	50,10
	43.45	204	51,10
	44.30	163	49,50
$\frac{A}{\gamma} = \frac{8}{10}$.	45.45	163	48,50
	47.25	196	50,10
	48.00	236	51,10
	49.30	236	49,50
$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$.	50.00	204	48,50
	52.75	164	50,10

4. — Condition pratique pour que les oscillations a longues périodes ne se produisent pas.

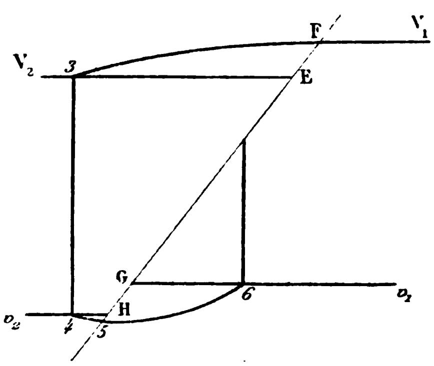
En se reportant à ce qui a été dit au n° **3** du Chapitre IV, on sait que, pour qu'il n'y ait pas de cycle fermé, c'est-à-dire pour que les oscillations à longues périodes ne puissent se produire, il est suffisant que le cycle issu du point F (*fig.* 22) ait un effet utile, ce qui se traduit par les deux conditions suivantes :

$$(78)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\Omega}\left(\Delta+\frac{2}{3}\delta\right)+\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{A}}{\Omega}z_2 > \sqrt{\frac{4\mathfrak{A}\rho\varepsilon}{\Omega}(z_2+\delta)},$$

$$(79)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\Omega}\left(\Delta+\frac{2}{3}\delta\right)+\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{A}}{\Omega}z_2 = \sqrt{\frac{4\mathfrak{A}\rho\varepsilon}{\Omega}}\left(\sqrt{\delta}-\sqrt{z_2}\right),$$

lorsqu'on suppose que, les résistances étant les mêmes pour l'ouverture et

Fig. 22.



la fermeture de la vanne, on a $V_1 - V_2 = v_1 - v_2$ et $V_1 - v_1 = V_2 - v_2$.

Pour que les deux conditions (78) et (79) soient compatibles, il faut

$$\sqrt{z_2+\delta} < \sqrt{\delta} - \sqrt{z_2}$$

ou encore

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_2+\delta} < \sqrt{\delta}.$$

Cette inégalité est impossible à satisfaire si z_2 est positif; or, quand z_2 existe, il est positif; la condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas d'oscillations à longues périodes est donc que z_2 n'existe pas pour le cycle issu

du point F que nous considérons, c'est-à-dire que la verticale 3, 4 de ce cycle coupe la ligne de régime avant d'avoir rencontré l'horizontale v_2.

On voit bien d'ailleurs que cette condition est suffisante, car, lorsqu'elle est satisfaite, le cycle extrême considéré rétablit l'état de régime par la période d'immobilité de la vanne correspondant à la verticale 3, 4, en supposant que cet état de régime n'ait pas été rétabli par un des cycles précédents.

Il nous suffit donc d'exprimer que l'ouverture de vanne α_3 relative au point 3 est plus grande que celle qui correspond au point H (*fig.* 22) dans le cycle extrême issu de F.

Or on a trouvé, pour un cycle quelconque,

$$\alpha_3 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_2 + Z_2) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}Z_2 - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega}Z_2}, \tag{69}$$

et, comme on a pour le cycle considéré

$$Z_2 = \delta = V_1 - V_2,$$

on en conclut

$$\alpha_3 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}V_1 - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}(V_1 - V_2) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega}(V_1 - V_2)}$$

ou encore

$$\alpha_3 = \frac{\mathcal{A}}{\Omega}\left(V_2 + \tfrac{2}{3}\delta\right) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega}\delta}. \tag{37}$$

D'autre part, l'ouverture de vanne donnée par le point H est $\frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2$; la condition cherchée est donc

$$\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\left(V_2 + \tfrac{2}{3}\delta\right) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega}\delta} > \frac{\mathcal{A}}{\Omega}v_2,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\Delta}{\Omega} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega} > \sqrt{\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{A}}\frac{\delta}{\Omega}}. \tag{98}$$

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant qui contient la solution complète du problème des oscillations à longues périodes :

Dans un régulateur à action indirecte où le mécanisme de commande du vannage est le même pour l'ouverture et la fermeture et où les résistances qui s'opposent à l'embrayage et au débrayage sont égales pour ces deux mouvements, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il ne puisse se produire d'oscillations à longues périodes est donnée par l'inégalité (¹)

$$\Delta + \tfrac{2}{3}\delta > \sqrt{\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{A}}\frac{\delta}{\Omega}}.$$

Il serait facile, en suivant un procédé analogue à celui que nous avons employé, de déterminer la condition à satisfaire pour la non-production des oscillations à longues périodes, dans le cas le plus général où ε n'est plus supposé égal à ε' et où $V_1 - V_2$ n'est plus le même que $v_1 - v_2$.

On a trouvé, en effet (Chap. IV, n° 3), comme condition de la non-existence d'un cycle fermé,

$$(76)\qquad \frac{\mathcal{A}}{\Omega}\left[V_1 - v_1 + \frac{2}{3}(v_1 - v_2)\right] > -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2 + \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon'}{\Omega}(z_2 + v_1 - v_2)},$$

z_2 étant déterminé par l'équation

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathcal{A}}{\Omega}\left(V_1 - v_2 - \frac{V_1 - V_2}{3}\right) - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon}{\Omega}(V_1 - V_2)} \\ &\quad = -\frac{2}{3}\frac{\mathcal{A}}{\Omega}z_2 - \sqrt{\frac{4\mathcal{A}\rho\varepsilon'}{\Omega}z_2}. \end{aligned}\right.$$

(¹) Nous rappelons ici le sens des diverses quantités qui figurent dans cette condition :

Δ est la différence entre les vitesses V_1, v_1, correspondant à l'embrayage de fermeture et au débrayage d'ouverture ou encore au débrayage de fermeture V_2 et à l'embrayage d'ouverture v_2 ;

δ est la différence entre les vitesses correspondant à l'embrayage et au débrayage de l'ouverture ou de la fermeture;

$\frac{\Omega}{\mathcal{A}}$ est le rapport de la vitesse moyenne $\frac{V_1 + V_2 + v_1 + v_2}{4}$ à l'ouverture de vanne qui lui correspond sur la ligne de régime dans l'état moyen de la machine auquel on rapporte les perturbations;

ε est un nombre déterminé et constant qui résulte de la disposition même du mécanisme de commande du vannage;

ρ est la caractéristique mécanique de la machine dans l'état moyen; c'est le chemin parcouru par la machine dans cet état moyen de régime depuis l'instant où la vanne a été fermée complètement jusqu'à l'arrêt. Cette quantité peut se déterminer par l'expérience.

Si l'on désigne par U la distance de V_2 à v_1, par δ celle de v_1 à v_2, ces deux relations deviennent

$$\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}}\left(U + \delta + \frac{2}{3}\delta'\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}}\,z_2 > \sqrt{4\rho\varepsilon'(z_2 + \delta')},$$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}}\left(U + \frac{2}{3}\delta + \delta'\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\Omega}}\,z_2 = \sqrt{4\rho}\left(\sqrt{\varepsilon\delta} - \sqrt{\varepsilon' z_2}\right),$$

et il suffit de tirer z_2 de la dernière et de le porter dans la première pour obtenir la condition cherchée.

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas général, l'hypothèse que nous avons faite de ε égal à ε' et de δ égal à δ' étant, ainsi que nous l'avons fait remarquer, toujours admissible dans les circonstances ordinaires de la pratique et la condition très simple à laquelle nous sommes parvenu pouvant dès lors être adoptée pour les applications; il nous reste seulement à discuter cette condition.

5. — Discussion de la formule trouvée.

Pour nous rendre compte du sens mécanique de la formule (98) précédemment obtenue, considérons un moteur pourvu de son appareil de régulation et examinons ce qui va se produire quand on demandera à ce moteur d'effectuer des travaux très différents.

ε a dans ce cas une valeur absolument fixe : c'est la constante cinématique du mouvement de commande du vannage; Δ et δ sont également constantes, puisqu'elles ne dépendent que de la construction de l'appareil de régulation; enfin Ω ne varie pas, car c'est la vitesse moyenne de régime qui convient au moteur, c'est-à-dire celle qui correspond à son maximum de rendement.

Il n'en est plus de même pour ρ et $\mathcal{A}$, quantités qui se rapportent à l'état moyen de la machine, puisque nous nous proposons précisément d'étudier l'influence des variations de cet état moyen.

Ces deux quantités ne varient pas d'ailleurs indépendamment l'une de l'autre et, si l'on se reporte à l'expression de ρ (Chap. II, n° 2, formule 11),

on voit que cette quantité dépend de la résistance que l'on a à vaincre et, par conséquent, de l'ouverture de vanne, c'est-à-dire de $\mathcal{A}$.

En remplaçant ρ par son expression $\frac{I\Omega^3}{2\Phi_1\mathcal{A}}$, la condition (98) devient

$$(99) \qquad \frac{\Delta}{\Omega} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega} > \frac{\Omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{2I\varepsilon\delta}{\Phi_1}},$$

où Φ_1, valeur du travail moteur pour une ouverture de vanne égale à l'unité, est désormais constante, puisqu'elle dépend uniquement du moteur et où I, qui représente en quelque sorte l'inertie des masses mises en mouvement, est supposé toujours le même.

Toutes les quantités qui figurent dans le second membre sont donc constantes, sauf $\mathcal{A}$ qui varie avec le travail demandé à la machine et lui est proportionnel.

Il résulte de là que, lorsque le travail résistant diminue, le second membre va en croissant et que l'on peut toujours théoriquement imaginer une résistance assez faible pour que l'inégalité précédente ne soit plus satisfaite, c'est-à-dire pour que les oscillations à longues périodes prennent naissance.

Ainsi, pour un moteur donné muni d'un appareil de régulation donné aussi, on arrivera toujours à produire des oscillations à longues périodes si l'on peut diminuer suffisamment le travail résistant.

Il faut bien remarquer d'ailleurs que ce travail n'étant pas susceptible de s'annuler, en raison des résistances que comporte le mouvement de la machine elle-même, il pourra être impossible pratiquement d'atteindre la limite pour laquelle les oscillations à longues périodes se produiraient alors même que l'on débrayerait tous les outils.

Dans cet ordre d'idées, *si l'on désigne par $\mathcal{A}_1$ l'ouverture de vanne correspondant pour l'état de régime à la vitesse donnant le maximum de rendement du moteur, lorsque les seules résistances à vaincre sont celles qui résultent du mouvement même, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que les oscillations à longues périodes n'apparaissent jamais, quelles que soient les variations de la résistance, est représentée*

par l'inégalité

$$\frac{\Delta}{\Omega} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega} > \frac{\Omega}{\mathcal{L}_1}\sqrt{\frac{2I\varepsilon\delta}{\Phi_1}}. \tag{100}$$

En toute hypothèse, on reconnaît par ce qui précède que, lorsque la résistance diminue, l'appareil de régulation perd de son efficacité en ce sens qu'il met plus de temps à rétablir la vitesse de régime, si tant est qu'il puisse y arriver.

Les diverses conclusions auxquelles nous sommes parvenus supposent que I conserve sensiblement la même valeur, c'est-à-dire qu'avant et après une perturbation l'inertie des pièces de la machine est équivalente. Si l'on veut comparer deux installations dans lesquelles I a des valeurs différentes, on trouve tout de suite, par l'examen de la condition donnée, que les oscillations à longues périodes sont, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus à craindre que I a une valeur plus forte. On voit ainsi qu'en augmentant ce qu'on peut appeler le volant de la machine, on risque de compromettre de la façon la plus fâcheuse le fonctionnement de l'appareil de régulation.

Pour que deux régulateurs à action indirecte, installés sur deux moteurs différents, produisent le même effet au point de vue du temps nécessaire pour le rétablissement du régime après une perturbation, il faut et il suffit, si $\frac{\Delta}{\Omega}$ et $\frac{\delta}{\Omega}$ sont les mêmes, que la quantité $\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{L}}$ ou $\frac{2I\Omega^2\varepsilon}{\Phi_1\mathcal{L}_1^2}$ ait la même valeur. Sous cette condition on sera certain que, pour des perturbations représentant la même grandeur relative, on obtiendra le même effet de régulation et l'on pourra ainsi déduire d'un régulateur existant qui fonctionne bien un régulateur dont le bon fonctionnement sera également assuré.

6. — Conséquences pratiques pour l'établissement des régulateurs.

Reprenons la condition donnée

$$\frac{\Delta}{\Omega} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega} > \sqrt{\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{M}}\frac{\delta}{\Omega}}; \tag{98}$$

$\frac{\delta}{\Omega}$ étant toujours une très petite quantité dans tout appareil convenablement installé, on peut, dans une première approximation, négliger le terme $\frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega}$ vis-à-vis du radical et remplacer ainsi la formule (98) par la relation

$$\frac{\Delta}{\Omega} > \sqrt{\frac{4\rho\varepsilon}{\mathcal{M}}\frac{\delta}{\Omega}}. \tag{101}$$

On reconnaît alors immédiatement sous cette forme que $\frac{\delta}{\Omega}$ étant du deuxième ordre par rapport à $\frac{\Delta}{\Omega}$ doit être lui-même petit, par rapport à cette quantité, pour qu'il n'y ait pas d'oscillations à longues périodes. Or, si l'on se reporte à la signification de δ qui mesure la différence des vitesses correspondant à l'embrayage et au débrayage, c'est-à-dire la variation de vitesse qu'il faut imprimer à l'appareil à boules pour vaincre les résistances supplémentaires s'opposant au débrayage, on en conclut que cette variation de vitesse ne doit être qu'une petite fraction de la variation admise pour la vitesse de régime.

Mais, pour diminuer la différence des vitesses relatives à l'embrayage et au débrayage, il faut augmenter la puissance du régulateur, de telle sorte que, bien qu'on ne demande à cet appareil qu'un travail très faible, il n'en est pas moins nécessaire qu'il soit relativement énergique.

A ce point de vue, l'avantage que l'on trouve à employer un appareil de régulation à action indirecte, au lieu d'un régulateur à action directe, est beaucoup moins grand qu'on pourrait se l'imaginer tout d'abord; l'appareil à boules, si l'on veut éviter les oscillations à longues périodes, ne saurait être pris aussi léger qu'on eût pu le croire.

Le seul moyen d'échapper à cette conséquence serait de prendre pour $\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{4\rho\varepsilon}}$, c'est-à-dire pour $\frac{\mathcal{A}}{\gamma}$, des valeurs plus grandes que l'unité et dépassant notablement la limite que nous avons indiquée; or cela revient à sacrifier une partie de l'action régulatrice de l'appareil ([1]). C'est là un des inconvénients, bien connus des praticiens, des régulateurs à action indirecte, lorsqu'ils sont trop légers. Si l'on désire pour eux une grande régularité, il faut craindre les oscillations à longues périodes et, si l'on veut ne pas redouter ces oscillations, il faut diminuer la régularité.

Il résulte de ce fait que le seul moyen pratique d'obtenir une action régulatrice efficace d'un régulateur à action indirecte consiste dans le procédé que nous avons indiqué précédemment, c'est-à-dire dans l'augmentation de la puissance de l'appareil à boules.

On reconnaît ainsi quelle importance présente, pour l'établissement d'un régulateur, le calcul exact des relations de grandeur qui doivent exister entre ces divers éléments, relations que l'on fixe le plus souvent au hasard. On voit, en particulier, à quels inconvénients on peut être exposé lorsque, suivant l'habitude des constructeurs, on choisit l'appareil de régulation uniquement d'après la force du moteur, sans se préoccuper de l'installation mécanique à laquelle il est destiné, des perturbations qui sont susceptibles de se produire, des écarts de vitesse que l'on peut tolérer.

Nous allons indiquer dans le paragraphe suivant quelle est la marche rationnelle qu'il conviendrait de suivre en pareil cas.

([1]) On a vu, en effet, au Chapitre II, n° 5, que l'on avait

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\omega_m^3 - \omega^3}{\omega^3},$$

ω_m étant la valeur maxima atteinte par la vitesse dans une période de mouvement de la vanne lorsqu'on se place dans le cas théorique où l'on supprime brusquement toute résistance au début de cette période.

Il résulte de là que l'on ne peut augmenter $\frac{\alpha}{\gamma}$, et par suite $\frac{\mathcal{A}}{\gamma}$ qui en est une des valeurs, qu'en faisant croître par le fait même le rapport $\frac{\omega_m}{\omega}$, c'est-à-dire qu'en augmentant le champ des écarts de vitesse permis par l'appareil de régulation.

7. — Idée de la marche a suivre pour l'établissement d'un appareil de régulation a action indirecte.

Le premier point à fixer par une discussion préalable basée sur la connaissance du genre de travail à effectuer, sur les variations qu'il peut présenter, sur la nature des transmissions que l'on a choisies, c'est la grandeur relative des perturbations susceptibles de troubler l'état moyen de la machine.

On détermine ensuite, à l'aide des mêmes éléments, la limite des variations accidentelles de vitesse, que l'on tolérera au moment où se produisent ces perturbations.

Ces deux quantités, intensité relative de la perturbation et variation correspondante de la vitesse, sont liées entre elles par une relation qui, pour les cas ordinaires de la pratique, peut être réduite, comme l'on sait, à

$$z = \frac{\mathcal{A}\Omega}{4\rho\varepsilon} y^2,$$

où y représente la fraction dont varie la résistance pendant la perturbation considérée, et où z est la variation accidentelle qui en résulte, pour la vitesse de la machine, pendant le fonctionnement de l'appareil de régulation.

Comme l'on connaît $\mathcal{A}$ et ρ, puisque l'on sait quelle machine doit être employée, comme, d'autre part, on a y et z, ainsi que nous venons de le dire, on calcule ε par la relation précédente.

Le mécanisme de commande du vannage se trouve ainsi connu dans sa partie essentielle; on achève de le fixer par la considération des conditions spéciales du projet, et l'on peut ensuite, par l'expérience ou par le calcul, déterminer quels sont les efforts nécessaires pour produire l'embrayage et le débrayage.

Si l'on passe alors à l'appareil à boules, on établit par une discussion préalable, reposant comme la précédente sur la nature du travail à produire et sur les circonstances particulières où l'on se trouve, l'amplitude Δ que l'on peut admettre pour la zone des vitesses de régime. En appliquant la

condition que nous avons indiquée pour qu'il ne se produise pas d'oscillations à longues périodes, condition que l'on aura d'ailleurs transformée en égalité par l'introduction d'un facteur de sécurité, on en déduit la valeur de δ.

La valeur de δ une fois obtenue, il suffit d'appliquer les formules connues pour les régulateurs à force centrifuge, et l'on en conclut quelles sont la masse et la vitesse qu'il convient de donner aux boules de cet appareil pour que la variation de vitesse δ puisse vaincre les résistances au débrayage et à l'embrayage calculées précédemment.

CHAPITRE VI.

MODIFICATIONS A INTRODUIRE DANS L'ÉTABLISSEMENT DES RÉGULATEURS NOUVEAUX. IDÉE GÉNÉRALE DE LA SOLUTION A ADOPTER.

Toutes les considérations exposées dans le Chapitre précédent montrent que les appareils de régulation à action indirecte ne sont pas capables, à moins de sortir des dimensions ordinaires, de donner une régularité de vitesse très grande à la machine qu'ils sont appelés à commander. On a établi, en effet, que le seul moyen de diminuer l'amplitude des oscillations de la vitesse, pendant la durée du fonctionnement du régulateur, était d'accroître la quantité ε, ou si l'on veut la puissance du mécanisme de commande du vannage, ce qui a pour résultat d'exposer à des oscillations à longues périodes ou, tout au moins, à un nombre d'oscillations considérables, avant que l'état de régime soit établi. Il en résulte que les appareils de régulation dont il s'agit, par leur principe même, ont une action ou peu énergique ou très lente et que, lorsqu'on les emploie, il faut s'attendre, selon leurs proportions, soit à une régularité relativement grande, mais avec une très grande lenteur de rétablissement pour la vitesse de régime, soit à une action rapide pour ramener le régime,

après une perturbation, mais avec des écarts notables de la vitesse. En un mot, les oscillations de la vitesse peuvent être faibles et durer longtemps, ou être fortes et s'éteindre rapidement.

On peut bien, il est vrai, améliorer le fonctionnement des régulateurs à action indirecte par un certain nombre de précautions, que nous allons indiquer au début de ce Chapitre; mais, pour obtenir à la fois une grande régularité de mouvement et une action rapide, il est nécessaire de modifier le principe de ces appareils. Nous trouverons dans les études précédemment faites les éléments nécessaires pour cette modification, qui fera l'objet de la seconde partie du Chapitre.

I. — Précautions a prendre dans l'installation des mécanismes ordinaires de commande du vannage.

La seule manière d'affaiblir les chances de production des oscillations à longues périodes pour un régulateur donné, d'augmenter la rapidité d'action sans diminuer la régularité et d'améliorer ainsi le fonctionnement, c'est de rendre l'écart des vitesses correspondant à l'embrayage et au débrayage aussi faible que possible. Le mécanisme de commande du vannage joue un rôle important à ce point de vue.

La majeure partie des résistances qui s'opposent à la fois à l'embrayage et au débrayage sont dues, en effet, aux frottements dont on diminuera l'intensité en réduisant les pressions qui les produisent. Il conviendra donc, dans tous les cas, d'accroître autant qu'on le pourra la vitesse des organes d'embrayage et de débrayage.

Si l'on emploie un manchon à dents, ce manchon devra tourner avec une grande rapidité pour diminuer la pression que les dents exercent les unes sur les autres. De plus, on aura soin de faire ces dents très petites, afin de réduire le chemin à parcourir pour séparer les deux pièces en prise du manchon et, par suite, le travail à demander à l'appareil à boules. Dans le même ordre d'idées, il sera utile de ne pas rendre trop faible le diamètre de l'arbre sur lequel glisse le manchon mobile, puisqu'on accroîtrait ainsi la pression exercée sur les clefs fixes de calage.

Des précautions de même nature devront être prises quand on se servira d'un manchon à friction qui peut être considéré comme un manchon à dents infiniment petites et qui, d'après ce qui précède, présentera ainsi certains avantages. La même remarque s'applique au cas d'embrayages par cône de friction extérieurs.

Lorsqu'on mettra en usage un équipage de poulies folles et fixes actionnées par des courroies, il importera que ces courroies marchent avec une grande vitesse, qu'elles ne soient pas trop larges et que le mécanisme de commande de la fourchette présente une grande mobilité.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations pratiques et nous n'entrerons pas dans le détail des développements qu'elles pourraient comporter; ce que nous venons de dire suffit à montrer quelle est l'idée à suivre dans chaque cas.

En somme, l'on peut agir de deux manières pour améliorer le fonctionnement des régulateurs à action indirecte : la première, que nous avons exposée au n° 7 du Chapitre V, s'applique à l'appareil à boules dont on doit augmenter l'énergie; la seconde, que nous venons d'indiquer, est relative à l'appareil de commande du vannage et consiste à y diminuer les frottements.

Mais ces deux procédés, par leur nature même, sont soumis à des limites assez rapprochées et ne peuvent, par suite, conduire toujours à un effet suffisant; on peut obtenir un résultat plus appréciable à l'aide d'appareils de commande à action intermittente dont nous allons faire connaître le principe.

2. — Emploi d'appareils de commande a action intermittente.

Lorsqu'on examine séparément les résistances qui se produisent au moment de l'embrayage et du débrayage, on reconnaît que ce sont généralement les secondes qui sont de beaucoup les plus importantes. A l'instant de l'embrayage, en effet, on a à vaincre les seuls frottements que produit le jeu de l'appareil à boules marchant à vide, puisque la vanne n'est pas encore en mouvement, tandis qu'à l'instant du débrayage on est

obligé de faire entrer en ligne de compte tous les efforts dus à la mise en prise des organes de transmission du vannage, efforts qui, dans tout appareil bien construit, sont de beaucoup les plus importants. On pourrait songer à équilibrer au moins en partie ces résistances nouvelles à l'aide d'organes supplémentaires intervenant au moment opportun, tels, par exemple, que des contrepoids agissant à l'instant du débrayage et remontés ensuite par la machine; mais, si l'on ne veut pas compliquer le mécanisme, le moyen le plus simple de diminuer ces résistances est de les rendre intermittentes.

On peut donc avoir un sérieux avantage à remplacer les organes ordinaires de transmission de mouvement que nous venons de passer en revue par des appareils à rochet. Le régulateur, n'ayant alors pour produire le débrayage qu'à soulever le cliquet, le fera très facilement au moment où celui-ci reviendra en arrière. Il suffira dès lors de régler l'amplitude du mouvement de ce cliquet, de telle sorte que le chemin qu'il fait décrire à la vanne dans chacun de ses mouvements en avant soit assez petit pour ne pas être capable d'amener de trouble notable dans la vitesse de régime.

3. — Appareils basés sur un principe nouveau. Idée d'une première solution.

Lorsqu'on s'assujettit à conserver le principe ordinaire des appareils de régulation à action indirecte, c'est-à-dire à produire l'embrayage et le débrayage du mécanisme de commande du vannage pour la même position théorique du régulateur ou plus exactement pour la même vitesse de la machine, les seuls moyens dont on dispose pour améliorer le fonctionnement sont, comme nous l'avons vu, d'augmenter l'énergie du régulateur et de diminuer les résistances à l'embrayage et au débrayage. A ce dernier point de vue, les procédés divers que nous avons indiqués peuvent réaliser de sérieux avantages, et il est possible de la sorte d'obtenir des appareils suffisants pour les cas ordinaires de la pratique. Mais les régulateurs ainsi installés n'en présentent toujours pas moins cet inconvénient qu'ils

ne régularisent notablement la vitesse qu'en acquérant une grande lenteur d'action.

Si l'on considère même le cas limite des régulateurs sans frottement, qui représentent les mécanismes les plus parfaits que théoriquement on puisse obtenir, on sait qu'il n'est permis d'accroître leur puissance régulatrice qu'en augmentant simultanément le nombre des oscillations de la vitesse qui se produisent après une perturbation (Chapitre V, n° 2). On a vu, en effet, que dans ce cas, pour réduire notablement l'amplitude des écarts de vitesse, il faut augmenter ε, c'est-à-dire rendre le mécanisme de commande du vannage plus énergique et, par suite, le mouvement de la vanne plus rapide. Or, pour ε très grand, l'effet de chaque période de mouvement est, comme nous l'avons démontré, de faire passer simplement la vanne de part et d'autre de la position moyenne à atteindre sans qu'elle s'en rapproche sensiblement.

Il résulte de là que, si l'on veut avoir une régularité très grande, tout en évitant la production d'oscillations indéfinies, il faut arrêter le mouvement de la vanne avant qu'elle soit revenue à la position correspondant au début de son mouvement.

Si l'on se reporte au tracé des courbes de déplacement, on reconnaît que la vanne passe par la position compatible avec le rétablissement de la vitesse de régime peu après que la vitesse de la machine a passé par son maximum ou son minimum. D'après cela, si l'on veut qu'une période de déplacement du vannage produise le plus grand effet utile possible, il faut arrêter la vanne au moment où la vitesse de la machine commence à décroître après avoir crû ou à croître après avoir décru. C'est donc peu après l'instant où les boules supposées libres se mettent à revenir en sens contraire de leur mouvement primitif qu'il conviendrait de produire le debrayage du mécanisme de commande du vannage et, en réalisant ce désideratum, on arriverait généralement à rétablir immédiatement la vitesse de régime [1].

---

[1] M. Marcel Deprez a communiqué verbalement à la 5e session de l'Association française pour l'avancement des Sciences (Congrès de Clermont-Ferrand, 23 août 1876) une solution analogue à celle dont nous parlons actuellement. Le principe de son appareil consiste à arrê-

Or il n'est pas impossible de réaliser un mécanisme remplissant ces conditions et l'on pourrait arriver même à une très grande précision en ayant recours à l'électricité qui permet d'établir ou de supprimer des adhérences très énergiques par des efforts extrêmement faibles.

Si l'on veut s'en tenir aux agencements mécaniques ordinaires, on obtiendra le même résultat à l'aide d'échappements convenablement disposés. Ces dispositifs seront toujours assez délicats et demanderont un degré de précision supérieur à celui des machines ordinaires de l'industrie; on sait, en effet, que l'instant où se produit un maximum est toujours difficile à saisir. Aussi, dans la plupart des cas, sera-t-il préférable d'employer la deuxième solution que nous allons indiquer et qui correspond à des mécanismes plus robustes.

4. — Autre solution du problème.

Nous venons de rappeler au paragraphe précédent que, dans le régulateur parfait où les frottements sont négligeables, la première période de déplacement du vannage a pour effet de transporter sensiblement la vanne à la position symétrique de la position initiale par rapport à celle qu'elle devrait occuper pour rétablir le régime. Le chemin décrit pendant cette première période est donc, à très peu près, le double de celui qui conviendrait et, pour produire l'équilibre, il faudrait, une fois la première période terminée, ramener le vannage en arrière de la moitié du chemin qu'il vient de parcourir.

Or la période suivante a précisément pour effet de communiquer à la vanne un mouvement de sens contraire à celui qu'elle vient d'avoir; il suffira donc de limiter cette période au moment où le vannage aura décrit la moitié de l'espace parcouru dans la précédente.

La méthode consiste, comme on le voit, à employer la première période

ter le mouvement de la vanne ou de la valve d'admission au moment du premier maximum; la vitesse reste alors constante, mais elle n'est pas égale à la vitesse de régime; pour l'y ramener, il suffit d'ouvrir ou de fermer, pendant le temps nécessaire, une vannette ou une seconde valve distincte de celle sur laquelle peut agir le régulateur.

pour enregistrer mécaniquement l'étendue de la perturbation subie et à limiter la deuxième période d'après cette étendue.

Dans cet ordre d'idées, ce serait l'index servant à mesurer l'amplitude de la première période qui serait chargé de limiter celle de la seconde en agissant sur un déclanchement spécial.

Il pourrait, du reste, y avoir avantage dans la pratique, en raison des frottements que l'on ne peut jamais supprimer complètement, à prendre pour rapport des amplitudes des deux périodes successives un nombre un peu différent de $\frac{1}{2}$. Le rapport le plus avantageux serait déterminé par l'expérience et se réaliserait, par exemple, en laissant indéterminé un petit équipage de roues dentées.

Nous ne pouvons entrer ici dans le détail des agencements qui pourraient être imaginés pour réaliser mécaniquement l'idée qui précède; nous nous réservons d'aborder le côté pratique dans un travail subséquent où nous appliquerons la théorie exposée et les résultats obtenus aux mécanismes des usines à poudre, c'est-à-dire à l'une des industries qui ont besoin de l'action régulatrice la plus énergique et la plus rapide.

Ce qui vient d'être dit suffit pour faire comprendre d'une façon générale les modifications à introduire dans le principe des régulateurs à action indirecte et les moyens dont on dispose lorsqu'on veut supprimer en quelque sorte toute oscillation de la vitesse, c'est-à-dire augmenter la rapidité d'action de ces appareils, tout en maintenant la vitesse de la machine dans des limites très resserrées.

CHAPITRE VII.

INDICATION DE LA MÉTHODE A SUIVRE DANS CERTAINS CAS SPÉCIAUX OU LES RÉSULTATS GÉNÉRAUX ACQUIS NE SERAIENT PLUS APPLICABLES.

Toute la théorie que nous venons d'établir dans le présent travail suppose que le moteur auquel on a affaire fonctionne dans des conditions voisines de son maximum de rendement; mais il ne peut pas en être toujours ainsi et, lorsque les différences atteignent une certaine importance, lorsque le rendement est susceptible de varier d'une façon sensible pour les diverses vitesses que l'on a à considérer, il devient nécessaire, dans certaines circonstances, de tenir compte de ces variations de rendement.

La marche générale à suivre pour l'étude de ces cas particuliers est la même, bien entendu, que celle que nous avons indiquée; mais les calculs deviennent beaucoup plus compliqués et seraient presque impraticables si l'on voulait employer exclusivement la méthode analytique. Nous allons montrer comment on peut résoudre la question d'une façon suffisamment exacte à l'aide de tracés graphiques.

Les développements que nous avons donnés au début de ce Mémoire ont montré que le problème de la régularisation du mouvement dans les appareils à action indirecte pouvait être traité et que les questions qu'il soulève pouvaient être examinées lorsqu'on avait le tracé des courbes de déplacement, c'est-à-dire lorsqu'on connaissait la relation qui lie la vitesse de la machine et l'ouverture du vannage.

L'élément fondamental de ce tracé, celui que l'on doit connaître *a priori*, c'est la loi de variation de rendement du moteur; ceci revient à supposer que l'on a la forme exacte des différentes lignes de régime.

Nous admettrons donc que l'on ait représenté sur une épure, disposée comme nous l'avons indiqué, la série des lignes de régime et nous allons

nous proposer, en prenant toujours pour coordonnées α et ω, d'obtenir la courbe de déplacement partant d'un point donné et correspondant à un état moyen bien déterminé de la machine.

Les équations du mouvement sont, comme l'on sait,

$$\text{(1)} \qquad I\omega\, d\omega + \Psi_1\, d\theta = \Phi_1\, \alpha\, dt,$$

$$\text{(2)} \qquad d\theta = \omega\, dt;$$

et, puisqu'il s'agit d'une période de déplacement, fermeture par exemple, il faut y ajouter

$$\text{(7)} \qquad d\alpha = -\varepsilon\, d\theta,$$

ce qui réduit l'équation fondamentale du mouvement à

$$\varepsilon I\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = \Psi_1 - \Phi_1 \frac{\alpha}{\omega}.$$

Cette équation est l'équation différentielle des courbes de déplacement; elle s'applique absolument à tous les cas; seulement, le rendement du moteur ne pouvant plus être regardé comme constant dans les limites de vitesse considérées, il n'est plus permis de donner à Φ_1 une valeur moyenne constante indépendante de ω.

Mais l'équation précédente fournit la valeur de $\frac{d\omega}{d\alpha}$ pour chaque valeur de ω, c'est-à-dire la direction de la tangente en chaque point, puisque Φ_1 est connu en fonction de α et de ω. On peut de cette façon tracer de proche en proche la courbe de déplacement.

Ce tracé, qui ne présente aucune difficulté, se fera d'ailleurs très rapidement si l'on remarque que le terme $\Phi_1 \frac{\alpha}{\omega}$ a une valeur constante pour tous les points d'une même ligne de régime. L'équation de cette ligne est, en effet,

$$\text{(10)} \qquad \Phi\alpha = \Psi\omega,$$

de telle sorte que la valeur du terme $\Phi \frac{\alpha}{\omega}$ n'est pas autre chose que celle de la résistance Ψ qui caractérise la ligne de régime considérée.

Une fois que les lignes de régime auront été tracées avec l'indication de la valeur de leur paramètre, il sera donc facile d'obtenir, à l'aide de calculs très simples, les courbes de déplacement par leurs tangentes.

Ces courbes de déplacement étant ainsi connues, on procédera à la discussion du problème en suivant une marche identique à celle que nous avons adoptée; nous n'avons pas à aborder l'examen détaillé de ces cas particuliers qui ne peuvent, en somme, constituer que des exceptions et au sujet desquels il n'y a pas à chercher de lois générales; il nous suffit d'avoir montré le moyen de se rendre compte des phénomènes lorsqu'on n'est plus dans les circonstances ordinaires de la pratique auxquelles s'appliquent les règles établies dans ce travail.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

SUR

LES SURFACES CYCLIDES

Par M. G. HUMBERT,

Ingénieur des Mines,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

INTRODUCTION.

Les surfaces du quatrième ordre, qui ont le cercle à l'infini pour ligne double et que M. Darboux a désignées sous le nom de *cyclides*, ont fait l'objet de nombreux et importants travaux, parmi lesquels les principaux sont, en France, ceux de MM. Moutard, Laguerre et Darboux.

M. Moutard a rencontré le premier ces surfaces remarquables dans l'étude de la transformation par rayons vecteurs réciproques et a démontré leurs propriétés fondamentales : ainsi il a fait voir qu'elles sont anallagmatiques par rapport à cinq points, qu'il a nommés *pôles principaux;* qu'elles admettent cinq séries de sphères bitangentes, que les plans des sections circulaires enveloppent cinq cônes du second ordre, etc. Il a mis également en lumière l'existence de cinq lignes focales et fait connaître le système triple orthogonal que forment les cyclides homofocales.

M. Laguerre a donné de belles propriétés relatives aux cinq modes de génération des cyclides, aux sections circulaires, aux normales et aux rayons de courbure des sections planes.

M. Darboux a fait connaître, à peu près en même temps que M. Moutard, l'existence du système triple orthogonal; il a étudié les quadriques inscrites dans les cyclides, les sections planes et sphériques, etc. Dans son

beau Mémoire *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, il a démontré la plupart des propriétés des cyclides déjà connues, en y ajoutant un grand nombre de théorèmes nouveaux sur lesquels j'aurai souvent à revenir dans le courant de mon travail.

Dans ce travail, j'ai cherché à faire une étude géométrique des surfaces cyclides en prenant pour point de départ deux propositions simples relatives aux anallagmatiques planes du quatrième ordre; j'ai montré comment on pouvait ainsi retrouver les principaux théorèmes connus, et la méthode employée m'a conduit à un certain nombre de propositions qui me semblent nouvelles.

Le présent Mémoire est divisé en deux Parties.

La première est consacrée à l'étude des quadriques inscrites dans une cyclide et à celle des systèmes de *points conjugués* sur cette surface.

M. Darboux a montré que toute tangente à une quadrique V, inscrite dans une cyclide, coupe cette surface en quatre points dont la détermination dépend de deux équations du second degré : ces quatre points se divisent donc en deux couples; et j'ai appelé *points conjugués* dans le système V les points des couples analogues, obtenus en considérant toutes les tangentes à la quadrique V.

J'ai appelé ensuite *sphères du groupe* V les sphères qui coupent la cyclide suivant une courbe telle qu'un des quatre cônes du second ordre qui la contiennent soit circonscrit à la quadrique V.

Cela posé, les théorèmes principaux démontrés dans la première Partie sont les suivants :

1° *Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe* V, *par rapport à une cyclide* S, *est une cyclide* S′, *homofocale à la première, et dont les focales singulières sont les focales de la quadrique* V.

Ce théorème donne lieu à de nombreuses applications relatives aux propriétés focales des courbes sphériques situées sur une cyclide, aux lignes de courbure, aux rayons de courbure principaux, etc.

Il m'a permis, en particulier, d'arriver simplement aux théorèmes de

M. Moutard sur le système triple orthogonal formé par les cyclides homofocales.

2° *Les plans perpendiculaires en leurs milieux aux droites qui joignent deux points d'une cyclide conjugués dans un système* V, *enveloppent une quadrique* U *homofocale aux déférentes de la cyclide.*

De là résultent des propriétés relatives à l'intersection d'une cyclide et d'une sphère ou d'un cercle, à la courbure des cyclides, etc.

Dans la deuxième partie, on s'occupe spécialement d'une courbe, déjà considérée par M. Darboux, et dont l'étude est liée intimement à celle de la cyclide.

Cette courbe est une cubique gauche et jouit de nombreuses propriétés. je l'ai désignée sous le nom de *cubique principale.*

C'est le lieu des centres des quadriques inscrites dans une cyclide et dans les cyclides homofocales, et aussi le lieu des centres des déférentes de ces cyclides.

Les théorèmes les plus importants de la seconde partie sont les suivants :

Les axes des spiriques planes qu'on peut tracer sur une cyclide rencontrent en deux points la cubique principale.

Les normales à une cyclide en quatre points situés sur une droite rencontrant la cubique principale en deux points, sont dans un plan qui passe par un point fixe.

De ces théorèmes on déduit des propriétés intéressantes des sections planes et des normales d'une cyclide.

Pour terminer, j'étudie les différentes formes de la cubique principale dans les différentes espèces de cyclides.

Dans le courant de ce travail je me suis attaché à signaler avec soin les auteurs des propositions que j'ai rencontrées ou sur lesquelles j'ai eu à m'appuyer; je n'ose toutefois espérer n'avoir commis aucune erreur ou omission à cet égard, et il peut se faire que des théorèmes que j'ai crus nouveaux aient été déjà démontrés.

DÉFINITIONS.

On appellera *surface cyclide,* d'après la dénomination de M. Darboux, toute surface du quatrième degré ayant le cercle à l'infini pour ligne double; *cyclique plane,* toute courbe du quatrième degré ayant les deux points circulaires à l'infini de son plan pour points doubles, et *cyclique dans l'espace*, la courbe commune à une sphère et à une quadrique.

L'étude qui va suivre repose sur les deux propositions suivantes, faciles à vérifier et que j'ai démontrées analytiquement dans un travail présenté comme Thèse de Doctorat à la Faculté des Sciences de Paris (¹).

On sait que le centre des moyennes distances des points communs à une courbe algébrique et à une droite qui se déplace parallèlement à une direction fixe est une droite nommée *diamètre* (Newton). Tous les diamètres passent par un point fixe, nommé *centre*.

Or dans toute cyclique plane :

1° *Les diamètres sont perpendiculaires à la direction correspondante de transversales :* les directions des diamètres et des transversales sont donc conjuguées.

2° *Le centre est le point de rencontre des diagonales du parallélogramme formé par les asymptotes;* en d'autres termes, les droites qui joignent un des points doubles de la courbe au centre et à l'autre point double divisent harmoniquement l'angle que forment les deux tangentes à la cyclique au point double considéré.

La première de ces propositions montre que la cyclique occupe parmi les courbes du quatrième ordre la même place que le cercle parmi celles du second ordre.

Nous allons démontrer dans l'espace des théorèmes analogues, qui rapprocheront les cyclides des sphères.

(¹) *Sur les courbes de genre un*, p. 107 et 109.

PREMIÈRE PARTIE.

1. — Définition et propriétés du centre d'une cyclide.

Il est évident qu'un plan quelconque coupe une cyclide S suivant une cyclique plane [1].

Le lieu des centres des cycliques, intersections d'une cyclide fixe par une série de plans parallèles Π, *est une droite perpendiculaire à ces plans.*

En effet, soient p et q les points où les plans parallèles Π considérés rencontrent le cercle double; P le plan conjugué harmonique du plan de ce cercle par rapport aux deux plans tangents à la cyclide S au point p; Q le plan analogue pour le point q. Les plans P et Q contiennent respectivement les tangentes au cercle double en p et q et, par suite, se coupent suivant une droite ϖ perpendiculaire aux plans Π.

Un quelconque des plans Π coupe la cyclide suivant une cyclique σ, ayant p et q pour points doubles, et dans ce plan, la droite conjuguée harmonique de la ligne pq, par rapport aux tangentes à la cyclique σ en p (ou q), est évidemment située dans le plan P (ou Q); comme on sait qu'elle passe par le centre de la cyclique σ (2°), on en conclut que ce centre est à l'intersection des trois plans Π, P et Q.

Le lieu des centres des cycliques intersections de la cyclide S par la série des plans Π est donc la droite ϖ commune aux plans P et Q, droite qui est, comme on l'a vu, perpendiculaire aux plans Π.

C. Q. F. D.

---

[1] Dans tout le cours de ce travail, nous représenterons toujours les points par des lettres minuscules françaises a, b, c, ...; les lignes et courbes par des lettres minuscules grecques α, β, σ, ...; les surfaces par des lettres majuscules françaises ou grecques A, ..., P, S. Σ, Π, ... La lettre S sera réservée aux surfaces cyclides, la lettre Σ aux sphères et la lettre σ aux cycliques.

Nous appellerons la droite ϖ le *diamètre* correspondant à la série des plans Π : il existe un diamètre parallèle à une direction quelconque de l'espace.

Tous les diamètres se coupent en un même point.

Démontrons d'abord que deux diamètres quelconques se coupent.

Soient Π et Π' deux plans quelconques coupant la cyclide S suivant les cycliques σ et σ'; δ leur intersection et a le centre des moyennes distances des quatre points où la droite δ coupe la cyclide S; ce point est situé sur δ.

La perpendiculaire élevée en a à la droite δ, dans l'un des plans Π ou Π', passe par le centre de la cyclique commune à ce plan et à la cyclide S (1°); par suite, la perpendiculaire ϖ élevée au plan Π au centre de la cyclique σ rencontre la perpendiculaire ϖ' élevée au plan Π' au centre de σ'; et le plan de ces deux droites est perpendiculaire à la droite δ au point a.

En d'autres termes, les diamètres correspondant à deux séries quelconques de plans parallèles se rencontrent.

Soient maintenant ϖ et ϖ' deux diamètres, se coupant en un point o : les autres diamètres devant rencontrer ϖ et ϖ' et se couper entre eux passeront tous par le point o, ou bien seront tous situés dans le plan de ϖ et de ϖ'.

Cette seconde hypothèse est inadmissible, puisque les diamètres ont dans l'espace toutes les directions possibles; il en résulte qu'ils passent tous par un même point.

Nous appellerons ce point *centre de la cyclide;* nous le désignerons par o.

De ce qui précède résultent immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le centre de la cyclique commune à un plan et à une cyclide est le pied de la perpendiculaire abaissée sur ce plan du centre de la cyclide* (¹).

(¹) M. Laguerre a énoncé un résultat analogue sans démonstration dans sa Note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (*Soc. philom.*, t. VII, p. 241).

THÉORÈME II. — *Le centre des moyennes distances de quatre points d'une cyclide situés sur une droite est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du centre de la cyclide.*

Soient, en effet, δ la droite et a le centre des moyennes distances : nous avons démontré que le plan perpendiculaire à δ au point a renfermait deux diamètres (ϖ et ϖ') et passait dès lors par le point o.

THÉORÈME III. — *Le plan* (P) *conjugué harmonique du plan du cercle à l'infini par rapport aux deux plans tangents à une cyclide en un point* (p) *de ce cercle passe par un point fixe, qui est le centre de la cyclide.*

Nous avons vu, en effet, que le plan P contient le diamètre correspondant à toute série de plans passant par le point p.

Ce théorème est transformé par l'homographie dans le suivant :

THÉORÈME IV. — *Dans toute surface du quatrième degré à conique double, le plan, conjugué harmonique du plan de la conique double par rapport aux deux plans tangents à la surface en un point de cette conique, passe par un point fixe* (¹).

2. — SUITE DES PROPRIÉTÉS DU CENTRE.

L'intersection d'une cyclide et d'une sphère comprend le cercle à l'infini compté deux fois, et une courbe du quatrième degré. Cette courbe est une courbe de quatrième degré, à deux points doubles apparents. En effet, si deux surfaces d'ordre μ et ν ont une courbe commune de degré m, qui est une courbe double de la première surface et qui a h points doubles apparents, le nombre h' des points doubles apparents de la courbe de

(¹) REMARQUE. — *Une cyclide qui touche le plan de l'infini en un point p du cercle double se décompose en ce plan et en une cyclide du troisième ordre.*

Car une droite quelconque du plan de l'infini passant par p y coupe la cyclide en trois points ; comme elle rencontre le cercle double en un second point, elle aura cinq points communs avec la surface : il en résulte que le plan de l'infini fait partie de cette surface.

La cyclide se réduit donc à une surface du troisième ordre passant par le cercle à l'infini, c'est-à-dire à une cyclide du troisième ordre.

degré m' qui complète l'intersection est donné par la formule

$$8h - 2h' = (2m - m')(\mu - 1)(\nu - 1) - 2m(\nu - 1).$$

Ici, en faisant

$$h = 0, \quad m = 2, \quad m' = 4, \quad \mu = 4, \quad \nu = 2,$$

on trouve

$$h' = 2.$$

Or on sait que toute courbe du quatrième degré à deux points doubles apparents peut être placée sur une infinité de quadriques; et, par suite, l'intersection d'une sphère et d'une cyclide est une cyclique.

Nous appellerons *centre d'une cyclique gauche* le centre de la sphère qui contient cette courbe.

Soit, sur une cyclide S, une cyclique σ et une quadrique quelconque, H, passant par cette courbe : H coupera S, suivant une seconde courbe du quatrième degré, qui est également une cyclique.

En effet, cette seconde courbe a deux points doubles apparents, comme le montre la formule connue

$$2(h - h') = (m - m')(\mu - 1)(\nu - 1),$$

où m et m' sont les ordres de deux courbes composant l'intersection de deux surfaces de degrés μ et ν; h et h' le nombre des points doubles apparents correspondant à ces courbes. Ici, en faisant

$$\mu = 4, \quad \nu = 2, \quad m = 4, \quad m' = 4, \quad h = 2,$$

on trouve

$$h' = 2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Désignons par σ' la seconde cyclique commune aux surfaces S et H, par Σ et Σ' les sphères qui contiennent respectivement les cycliques σ et σ' : je dis que la droite qui joint les centres de ces deux sphères passe par le centre O de la cyclide, et qu'elle est divisée par ce point en deux parties égales.

Remarquons, en effet, que les cycliques σ et σ' coupent le cercle de l'infini aux mêmes points, situés sur la quadrique H; en un de ces quatre points, p, les tangentes aux courbes σ et σ' sont les intersections du plan tangent à H et des deux plans tangents à la cyclide. D'un autre côté, le plan tangent en p à la sphère Σ est le plan déterminé par la tangente à σ et la tangente au cercle de l'infini en ce point : c'est donc un des deux plans tangents à la cyclide au point p. Ainsi, chacun des deux plans tangents à S en p touche en ce point une des sphères Σ, Σ'.

En d'autres termes : *un des plans tangents à la cyclide en p passe par le centre de la sphère* Σ; *l'autre, par le centre de la sphère* Σ'.

Il en résulte que le milieu de la ligne des centres de ces deux sphères est dans le plan P que nous avons déjà introduit, et qui est conjugué harmonique du plan de l'infini par rapport aux deux plans qui touchent la cyclide en p.

On voit ainsi, en considérant les quatre points d'intersection de la quadrique H et du cercle à l'infini, que le milieu de la ligne des centres des sphères Σ et Σ' est commun à quatre plans tels que P : c'est donc (théorème III) le centre o de la cyclide.

Par suite :

Théorème V. — *Toutes les quadriques qui passent par une cyclique située sur une cyclide coupent cette surface suivant une deuxième cyclique dont le centre est fixe : ce centre est le symétrique du centre de la première cyclique par rapport au centre de la cyclide.*

On en déduit aisément la proposition suivante :

Théorème VI. — *Deux cycliques situées sur une cyclide et dont les centres sont symétriques par rapport au centre de cette surface sont sur une même quadrique.*

Corollaire. — *Deux cycliques situées sur une cyclide et dont les centres coïncident avec celui de cette surface sont sur une même quadrique.*

A la limite, si les deux cycliques du corollaire précédent se confondent,

c'est-à-dire si les rayons des sphères qui les contiennent deviennent égaux, on a le théorème suivant :

Théorème VII. — *Il existe une série de quadriques inscrites à une cyclide; elles touchent la cyclide suivant des cycliques ayant pour centre le centre de la surface; inversement, le long d'une telle cyclique, on peut inscrire une quadrique* (¹).

Nous allons donner quelques propriétés de ces quadriques, que nous désignerons par la lettre V.

3. — Des quadriques inscrites a une cyclide.

Nous appellerons *cyclique de contact* d'une quadrique inscrite la cyclique suivant laquelle elle touche la cyclide.

Reprenons le corollaire du théorème VI.

Deux cycliques σ et σ', situées à l'intersection de S et de deux sphères Σ et Σ', ayant même centre que la cyclide, sont sur une quadrique H.

Soit p un des quatre points où cette quadrique coupe le cercle de l'infini : nous avons vu que les plans tangents à la cyclide en p, touchaient respectivement en ce même point les sphères Σ et Σ'. Or ces deux sphères, ayant même centre, sont inscrites l'une à l'autre suivant le cercle à l'infini; par suite, au point p, les deux nappes de la cyclide ont même plan tangent. Il existe quatre points tels que p, donc :

Théorème VIII. — *Il y a sur le cercle de l'infini quatre points où les deux plans tangents à une cyclide se confondent; les quatre plans tangents passent par le centre de la surface* (²).

Nous appellerons ces quatre points *points de rebroussement*.

Il n'y a que quatre points de rebroussement sur le cercle de l'infini;

(¹) L'existence des quadriques inscrites dans une cyclide est bien connue, et se déduit aisément de l'équation de la surface (*voir* Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 110).

(²) L'existence de quatre points de rebroussement est connue depuis longtemps pour les surfaces du quatrième degré à conique double; on sait également que les plans tangents en ces quatre points sont concourants (*voir* aussi Darboux, *loc. cit.*, p. 170).

car, s'il en existait un cinquième, le plan tangent à la cyclide en ce point passerait également (théorème III) par le centre o de la surface; dès lors, toute sphère Σ ayant o pour centre toucherait la cyclide aux cinq points de rebroussement situés sur le cercle de l'infini et la couperait, par suite, suivant une cyclique σ passant par ces points. La cyclique σ ayant ainsi cinq points sur le cercle de l'infini se décomposera en deux cercles, dont l'un sera celui de l'infini, qui sera ainsi une ligne triple de l'intersection de la cyclide et de toute sphère Σ de centre o.

On en conclut que les plans tangents à l'une quelconque de ces sphères le long du cercle de l'infini, c'est-à-dire les plans tangents au cône isotrope de sommet o, touchent la cyclide le long de ce même cercle; et, par suite, en vertu du théorème III, les deux plans tangents à la cyclide en un point de sa ligne double coïncident et passent par le point o.

Le cercle à l'infini serait ainsi une ligne de rebroussement de la cyclide; c'est là un cas particulier que nous examinerons plus tard ([1]). C. Q. F. D.

THÉORÈME IX. — *Toutes les cycliques situées sur une cyclide et ayant pour centre le centre de cette surface passent par ses quatre points de rebroussement et ont même tangente en chacun d'eux.*

La première partie de ce théorème résulte immédiatement du théorème VIII; la seconde se démontre ainsi qu'il suit.

Soient deux cycliques quelconques σ et σ' de centre o, situées sur S, elles sont (théorème VI, corollaire) sur une quadrique et, par suite, ont pour tangentes en un des points de rebroussement de la cyclide l'intersection du plan de rebroussement et du plan tangent en ce point à la quadrique, c'est-à-dire la même tangente. C. Q. F. D.

On peut également énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME X. — *Les quadriques qui coupent une cyclide suivant deux courbes sphériques ayant même centre que cette surface rencontrent le cercle de l'infini aux quatre points de rebroussement de la cyclide considérée et touchent en ces quatre points quatre droites fixes.*

([1]) Nous admettrons également dans tout ce qui suit que les quatre points p, q, r, s de rebroussement sont distincts. Nous étudierons plus tard les cas particuliers.

Ces quadriques, étant homocycliques, ont mêmes directions de plans principaux et des sections circulaires ; les plans de sections circulaires sont les plans qui passent par deux des points de rebroussement de la cyclide.

Théorème XI. — *Ces résultats s'appliquent en particulier aux quadriques inscrites à une cyclide.*

Remarque. — Nous savons qu'une quadrique touche S le long de toute cyclique σ, située sur une sphère de centre o; si le rayon de cette sphère augmente indéfiniment, la cyclique σ devient le cercle à l'infini, compté deux fois, et la quadrique inscrite correspondante devient évidemment le plan de l'infini compté deux fois.

Ainsi :

Théorème XII. — *Parmi les quadriques inscrites à une cyclide, figure le plan de l'infini compté deux fois.*

Nous allons démontrer maintenant un théorème qui nous sera fort utile dans la suite; ce théorème est le suivant :

Théorème XIII. — *Toute quadrique* H, *qui coupe une cyclide* S *suivant deux courbes sphériques, touche le long d'une conique une des quadriques* V *inscrites dans cette surface et réciproquement* (¹).

Les sphères qui contiennent les deux courbes sphériques et celle qui renferme la cyclique de contact de V *et de* S *ont un cercle commun, dont le plan coïncide avec celui de la conique de contact de* V *et de* H.

En effet, la quadrique H, qui coupe S suivant les cycliques σ et σ', situées sur des sphères Σ et Σ', touche évidemment S aux quatre points a, b, c, d, qui sont communs à ces deux cycliques et qui sont situés sur le cercle d'intersection β des sphères Σ et Σ' (la cyclique σ coupe en effet la sphère Σ' en quatre points situés sur σ').

Or, d'après le théorème V, les centres des sphères Σ et Σ' sont symétriques par rapport au centre o de la cyclide; la perpendiculaire élevée

(¹) La première partie de ce théorème a été démontrée analytiquement par M. Darboux, *loc. cit.*, p. 111.

au plan du cercle β en son centre passe donc par o; et, par suite, les quatre points a, b, c, d sont sur une cyclique de centre o, c'est-à-dire sur la cyclique de contact de S et d'une quadrique inscrite V; la sphère C contenant cette cyclique passe ainsi par le cercle β.

Les quadriques V et H sont tangentes à S et par suite entre elles, aux quatre points a, b, c, d; elles sont donc inscrites l'une à l'autre le long d'une conique, dont le plan est celui des points a, b, c, d, c'est-à-dire celui d'un cercle commun aux sphères Σ, Σ' et C. C. Q. F. D.

Inversement, soit α la conique de contact d'une quadrique V inscrite à S et d'une quadrique H; la conique α coupe en quatre points la cyclique de contact de V et de S; ces points sont ceux où elle rencontre la sphère, qui contient cette cyclique; ils sont donc situés sur un cercle β.

Par conséquent, la quadrique H, circonscrite à V le long de la conique α, touchera S en quatre points situés sur le cercle β et qui seront des points doubles de la courbe d'intersection des surfaces S et H.

Cette courbe, du huitième ordre, a quatre autres points doubles sur le cercle à l'infini; elle est donc coupée en seize points par toute sphère contenant le cercle β; on en conclut aisément qu'elle se décompose en deux cycliques ([1]).

Avant de continuer l'étude des cyclides, nous allons démontrer quelques propriétés des cycliques, dont nous nous servirons plus loin.

4. — Des coniques sphériques inscrites dans une cyclique.

Soit σ une cyclique tracée sur une sphère Σ, de centre c; nous appellerons *conique sphérique* inscrite toute conique sphérique tracée sur la sphère contenant la cyclique et tangente à cette courbe en quatre points situés sur un cercle (c'est-à-dire dans un même plan).

L'existence des coniques sphériques inscrites se démontre aisément.

Du centre de la sphère Σ comme sommet, circonscrivons un cône C à une quadrique quelconque H passant par la cyclique σ; ce cône touche

([1]) Les propositions démontrées dans ce paragraphe se prouveraient aisément par le calcul.

évidemment σ en quatre points, situés sur sa conique de contact avec H et situés, par conséquent, dans un même plan; il en résulte que la conique sphérique, suivant laquelle ce cône coupe Σ, est inscrite à la cyclique considérée.

Réciproquement, soit une conique sphérique touchant σ en quatre points, situés dans un plan P; le cône C qui a pour base cette conique sphérique et pour sommet le centre de la sphère Σ est coupé par le plan P suivant une conique α, qui rencontre la cyclique σ en quatre points (les quatre points de contact de σ et de C), et par laquelle on peut dès lors faire passer une quadrique H, contenant la courbe sphérique σ. Cette quadrique a pour plan tangent en un des quatre points de contact de σ et de C, le plan déterminé par la tangente en ce point à la cyclique et la tangente à la conique α, c'est-à-dire, puisque ces deux droites sont tangentes au cône C, le même plan tangent que ce cône.

Il en résulte que le cône C est circonscrit à la quadrique H.

Par conséquent :

Théorème 1. — *Il existe une et une seule série de coniques sphériques inscrites dans une cyclique; les cônes qui ont pour base ces coniques et pour sommet le centre de la cyclique sont circonscrits aux différentes quadriques qui passent par cette courbe* [1].

Les quatre points de contact d'une cyclique et d'une conique sphérique inscrite sont, d'après ce qui précède, dans le plan polaire du centre de la sphère Σ par rapport à une des quadriques H, qui passent par la cyclique. Or on sait que les plans polaires d'un point, par rapport à un faisceau de quadriques, passent par une même droite; et si ce point est le centre d'une des quadriques du faisceau, la droite correspondante est à l'infini; par conséquent :

Théorème 2. — *Les quatre points de contact d'une cyclique et d'une conique sphérique inscrite sont sur un plan parallèle à un plan fixe.*

---

[1] M. Darboux a montré, *loc. cit.*, p. 34, qu'une cyclique admet une suite simplement infinie de coniques inscrites.

En d'autres termes :

Les quatre points de contact d'une cyclique et d'une conique sphérique inscrite sont sur un petit cercle de pôle fixe.

Cherchons maintenant combien on peut mener de coniques sphériques inscrites par un point a de la sphère Σ : cela revient à chercher combien il existe de quadriques H, passant par la cyclique σ, et tangentes à la droite qui joint le point a au centre de la sphère. Or on sait que, parmi les quadriques d'un faisceau, deux sont tangentes à une droite donnée; par suite :

Théorème 3. — *Par un point d'une sphère passent deux coniques sphériques inscrites à une cyclique tracée sur cette sphère.*

Parmi les quadriques passant par la cyclique σ se trouvent quatre cônes; les coniques sphériques inscrites qui leur correspondent sont à l'intersection de la sphère et des deux plans tangents menés du centre de cette surface à l'un des cônes; chacune d'elles se compose donc de deux grands cercles. En d'autres termes :

Théorème 4. — *Parmi les coniques sphériques inscrites à une cyclique, il en est quatre qui se décomposent en deux grands cercles.*

Il y a ainsi huit arcs de grand cercle doublement tangents à la courbe.

Tous ces théorèmes s'étendent aux *cycliques planes*, qu'on peut déduire, comme l'a fait observer M. Darboux, de leurs analogues sur la sphère en augmentant indéfiniment le rayon de cette sphère; on obtient les propositions suivantes :

Théorème 5. — *Il existe une série de coniques touchant une cyclique plane en quatre points situés sur un cercle, que nous appellerons* cercle de contact.

Par un point donné du plan passent deux coniques de cette série.

Parmi ces coniques inscrites, quatre se décomposent en un système de deux droites.

Tous les cercles de contact ont même centre.

Le centre commun des cercles de contact coïncide avec le centre de la cyclique plane. En effet, quatre des coniques inscrites se décomposent en deux droites, et la cyclique admet huit tangentes doubles; d'après ce qui précède, les deux points de contact d'une quelconque de ces tangentes sont également éloignés du centre commun des cercles de contact; en d'autres termes, les perpendiculaires élevées sur les huit tangentes doubles d'une cyclique, aux points milieux des deux points de contact, concourent au centre des cercles de contact; or nous savons que ces droites concourent au centre de la courbe, en vertu de la proposition que nous avons rappelée au commencement de ce travail:

La droite qui joint le centre d'une cyclique plane au centre des moyennes distances de quatre points situés en ligne droite sur la courbe est perpendiculaire à la droite de ces quatre points. C. Q. F. D.

Il en résulte que :

THÉORÈME 6. — *Dans une cyclique plane, les quatre points de contact d'une conique inscrite sont équidistants du centre de la cyclique.*

5. — SUITE DES PROPRIÉTÉS DES QUADRIQUES INSCRITES.

Un plan quelconque P coupe une cyclide S suivant une cyclique α:

1° L'intersection du plan P et d'une quadrique V, inscrite à S, est une conique, qui touche évidemment la cyclique α en quatre points : ces quatre points sont sur la cyclique de contact des surfaces V et S, et par conséquent sur le cercle, intersection du plan P et de la sphère Σ qui contient cette cyclique.

Le centre de ce cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan P du centre de la sphère Σ, c'est-à-dire du centre de la cyclide S (théorème VII); c'est donc le centre de la cyclique α (théorème I).

Ainsi, le plan P coupe les quadriques V inscrites à S suivant des *coniques inscrites* à la cyclique α.

2° *Inversement,* soit une conique quelconque β inscrite à la cyclique α : les quatre points de contact de ces deux courbes sont (§ 4, théorème 6)

sur un cercle ayant pour centre le centre de la cyclique α; ils sont donc également éloignés (théorème I) du centre de la cyclide S, et par conséquent ils sont (théorème VII) sur la courbe de contact de cette cyclide et d'une quadrique inscrite, V.

Il en résulte qu'en un quelconque de ces quatre points la conique β, qui touche la cyclide S, touche aussi la quadrique V et, par suite, est située sur cette quadrique.

Donc :

Par toute conique inscrite à une cyclique plane tracée sur une cyclide, passe une et une seule quadrique inscrite à cette surface.

On déduit de là le théorème suivant :

Théorème XIV. — *Par un point de l'espace passent deux quadriques inscrites à une cyclide* (¹).

En effet, par le point considéré et dans un plan quelconque qui le contient, on peut mener (théorème 5, § 4) deux coniques inscrites à la cyclique suivant laquelle ce plan coupe S; par suite, en vertu des résultats énoncés tout à l'heure, il existe deux quadriques et deux seulement, inscrites à la cyclide S et passant par le point donné.

Théorème. — *Il existe quatre quadriques inscrites à une cyclide et tangentes à un plan donné.*

En effet, nous avons vu que les intersections d'un plan quelconque P et des quadriques V inscrites à une cyclide S constituent le système des coniques inscrites à la cyclique α, suivant laquelle ce plan coupe S.

Il y a donc autant de quadriques V tangentes au plan P que de coniques évanouissantes inscrites à α, c'est-à-dire quatre (§ 4, théorème 5).

C. Q. F. D.

On sait de plus qu'une cyclique plane est anallagmatique par rapport à quatre points de son plan, dits *pôles principaux* de la courbe; chacun

(¹) Ce théorème se déduit immédiatement de l'équation générale des quadriques inscrites données par M. Darboux, *loc. cit.*, p. 110.

d'eux est à l'intersection de deux tangentes doubles, dont les quatre points de contact avec la cyclique sont sur un cercle.

On peut donc dire que les pôles principaux de la cyclique α sont les centres des coniques évanouissantes inscrites, c'est-à-dire les points de contact du plan P et des quatre quadriques V qui lui sont tangentes. Ainsi :

THÉORÈME XV. — *Il existe quatre quadriques inscrites à une cyclide et tangentes à un plan donné; les quatre points de contact sont les pôles principaux de la cyclique commune au plan et à la cyclide considérés.*

Remarque. — Parmi les quadriques V il y a trois *paraboloïdes.*

En effet, quatre quadriques V touchent le plan de l'infini (théorème XV); comme d'ailleurs le plan de l'infini compté deux fois figure parmi ces quadriques, il n'y a que trois paraboloïdes proprement dits.

Si p, q, r, s sont les points de rebroussement à l'infini de la cyclide S, par lesquels passent les quadriques V (théorème XI), les trois paraboloïdes couperont respectivement le plan de l'infini suivant les droites pq et rs; pr et qs; ps et qr.

6. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE POINTS CONJUGUÉS SUR UNE CYCLIDE.

THÉORÈME XVI. — *Si une droite touche en un point g une quadrique inscrite à une cyclide, le produit des distances de g à deux des points d'intersection de la droite et de la cyclide est égal au produit des distances du même point aux deux autres points d'intersection; la valeur commune de ces produits est la puissance du point g par rapport à la sphère qui contient la cyclique de contact de la quadrique considérée et de la cyclide.*

Soit en effet δ une droite tangente en g à la quadrique V inscrite à S, et coupant S aux points a, b, c, d. Par δ, on peut mener une quadrique H, inscrite à V, qui coupera S suivant deux cycliques σ_1 et σ_2, situées sur des sphères Σ_1 et Σ_2 : les points a et b seront supposés sur σ_1, les points c et d sur σ_2.

Le point g est sur la conique de contact de V et de H; il est donc (théorème XIII) dans le plan du cercle commun aux sphères Σ_1, Σ_2 et à la sphère G qui renferme la cyclique de contact de V et de S; il a dès lors même puissance par rapport à ces trois sphères. On a ainsi

$$ga \cdot gb = gc \cdot gd,$$

et la valeur de ces produits est la puissance de g par rapport à G.

C. Q. F. D.

Ainsi, toute tangente à V coupe la cyclide S en quatre points, formant deux couples et entre lesquels existent les relations métriques qu'on vient d'indiquer.

Soient a et b, c et d; a' et b', c' et d'; ... les couples de points ainsi définis, situés sur des tangentes δ, δ', ... à la quadrique V; nous dirons que les points a et b, c et d, a' et b', c' et d', ... sont *conjugués* dans le système défini par la quadrique V, ou plus simplement *dans le système* V.

Inversement : *deux points a et b de* S *sont conjugués dans un système.*

Soit en effet δ la droite ab, elle coupe S aux points c et d.

Faisons passer par a et b une sphère quelconque Σ_1; par les points c et d on pourra faire passer une sphère Σ_2 dont le centre soit symétrique de celui de Σ_1 par rapport au centre o de S; on sait en effet (théorème II) que les plans perpendiculaires à δ au milieu de ab et au milieu de cd sont équidistants de o.

Les cycliques σ_1 et σ_2, intersections de S et des sphères Σ_1 et Σ_2, sont par suite sur une quadrique H (théorème VI), circonscrite (théorème XIII) à une quadrique V, inscrite à S. La droite δ est une génératrice de H, puisque cette quadrique passe par a, b, c, d: elle touche donc V en un point g, situé sur la conique de contact de H et de V; on voit alors, comme dans la démonstration du théorème XVI, que l'on a

$$ga \cdot gb = gc \cdot gd,$$

et que ces produits sont égaux à la puissance du point g par rapport à la

sphère qui contient la cyclique de contact de V et de S; en d'autres termes :

Les points a et b sont conjugués dans le système V, *ainsi que les points c et d.*

De là résultent des conséquences intéressantes.

Remarquons d'abord que, étant donnés la droite δ et les couples de points a et b, c et d, le point g de cette droite tel que l'on ait

$$ga.gb = gc.gd$$

est déterminé sans ambiguïté. En effet, appelons a, b, c, d, g les distances des points a, b, c, d, g à un point fixe de δ, on a la relation

$$(g-a)(g-b) = (g-c)(g-d)$$

ou

$$g(a+b-c-d) = ab-cd,$$

qui donne g.

Cela posé, les points a et b, c et d étant conjugués dans un système V, on déduit de ce qui précède les résultats suivants :

1° Il existe une quadrique V, inscrite à S et tangente à la droite δ au point g, tel que $ga.gb = gc.gd$.

2° La sphère C, qui contient la cyclique de contact de cette quadrique, est la sphère de centre o par rapport à laquelle le point g a pour puissance le produit $ga.gb$: en d'autres termes, c'est la sphère de centre o qui coupe orthogonalement la sphère de centre g, dont le rayon a pour carré le produit $ga.gb$.

La sphère C est donc bien déterminée; il en est par suite de même de la quadrique V.

En d'autres termes, il existe une et une seule quadrique V tangente à δ en un point g tel que

$$ga.gb = gc.gd,$$

la valeur commune de ces rapports étant égale à la puissance de g par rapport à la sphère qui renferme la cyclique de contact de V et de S.

Par conséquent :

Deux points d'une cyclide sont conjugués dans un système et dans un seul.

Reprenons maintenant les notations adoptées plus haut.

Il résulte de cette dernière proposition que, *quelle que soit la sphère* Σ_1 passant par a et b, les cycliques σ_1 et σ_2 seront sur une quadrique H, circonscrite à une *même* quadrique V.

Par la droite δ (qui est, comme on sait, une génératrice de H) menons un plan quelconque P, qui coupe H suivant une seconde génératrice δ'. La droite δ' coupe Σ_1 en a' et b'; Σ_2 en c' et d' : ces quatre points sont sur les cycliques σ_1 et σ_2, et par suite sur S. Les points a' et b' sont conjugués dans le système V, car δ' touche V en un point de la conique de contact de H et de V, c'est-à-dire (théorème XIII) en un point appartenant au plan du cercle commun aux sphères Σ_1, Σ_2 et C (théorème XVI). D'ailleurs les points a, b, a', b' sont sur le cercle intersection de Σ_1 et de P; c, d, c', d' sur le cercle intersection de Σ' et de P.

L'un de ces cercles est évidemment un cercle quelconque passant par les points a et b (ou c et d), puisque le plan P et la sphère Σ_1 (ou Σ_2) ne sont assujettis qu'à la condition de passer par a et b (ou c et d).

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XVII. — *Un cercle ou une droite passant par deux points d'une cyclide conjugués dans un système* V *coupe la cyclide en deux nouveaux points conjugués dans le même système.*

On déduit aisément de là une définition simple d'un système de points conjugués.

Si par deux points d'une cyclide on fait passer des cercles, on obtient par l'intersection de ces cercles et de la cyclide des couples de points, par lesquels on fera encore passer des cercles donnant de nouveaux couples de points et ainsi de suite. Tous les couples ainsi obtenus forment l'ensemble des couples de points conjugués dans le système V.

On peut donner au théorème XVII la forme géométrique suivante :

THÉORÈME. — *Si, par deux points a et b d'une cyclide* S, *on fait passer un des cercles coupant la cyclide en deux nouveaux points* a', b'; a'', b'', ..., *les droites* $a'b'$, $a''b''$, ... *enveloppent une quadrique* V *inscrite à* S (¹).

Cette quadrique demeure la même si aux points a et b on substitue les points a' *et* b', a'' *et* b'', ... *ou les deux points où un cercle, passant par* a' *et* b', a'' *et* b'', ..., *coupe de nouveau la cyclide, etc.*

De ce qui précède découle également une propriété générale des quadriques V.

Soit, en effet, une droite δ coupant S aux points a, b, c, d; nous venons de voir qu'il existe une quadrique V, tangente à cette droite en un point g, tel que

$$ga.gb = gc.gd.$$

Inversement, nous savons que toute quadrique V, tangente à cette droite, la touche en un point g jouissant de la propriété précédente (théorème XVI).

Or on peut disposer les points a, b, c, d en deux groupes de deux points de trois façons différentes; il y a donc sur la droite trois points analogues à g, et par suite :

THÉORÈME XVIII. — *Il existe en général trois quadriques inscrites à une cyclide et tangentes à une droite donnée.*

Il nous reste encore à faire une remarque qui nous sera extrêmement utile.

REMARQUE. — *Si une quadrique* H *coupe* S *suivant deux cycliques* σ_1 *et* σ_2, *les couples de points où une génératrice quelconque de* H *rencontre chacune de ces courbes sont conjugués dans un même système.*

Ce système est défini par la quadrique V *à laquelle la quadrique* H *est circonscrite.*

Car le plan de la conique de contact de H et de V est le plan du cercle,

(¹) Cette proposition est due à M. Darboux (*loc. cit.*, p. 112).

commun aux sphères qui renferment les cycliques σ_1 et σ_2 et à la sphère C qui contient la cyclique de contact de V et de S; la démonstration s'achève comme celle du théorème XVI.

Inversement, étant donnée une droite δ, *tangente à* V *et coupant* S *aux points a et b*; *c et d, conjugués dans le système* V, *toute quadrique* H, *passant par* δ *et circonscrite à* V, *coupe* S *suivant deux cycliques : l'une d'elles passe par les points a et b, l'autre par les points c et d.*

7. — Lieu des conjugués d'un point.

Un point a d'une cyclide a, dans un système donné V_1, une infinité de conjugués; il y a, en effet, un de ces points à l'intersection de la cyclide et de toute tangente menée du point a à la quadrique V_1.

Il résulte de là que les conjugués d'un point a dans un système V_1 sont à l'intersection de S et du cône de sommet a circonscrit à V_1.

Cette intersection se compose (théorème XIII) de deux cycliques; une seule d'entre elles est le lieu des conjugués de a.

Pour le démontrer, considérons une sphère quelconque Ω, tangente à la cyclide S au point a; l'intersection des deux surfaces sera une cyclique ω ayant un point double en a.

Le cône du second degré K, qui a le point a pour sommet et ω pour directrice, est circonscrit à une quadrique V (théorème XIII), et nous avons vu, au paragraphe précédent, que toute génératrice de K coupe Ω en deux points qui sont conjugués dans le système V.

Or toutes les génératrices de K coupent Ω au point a; il en résulte que tous les points de la cyclique ω sont conjugués du point a dans le système V.

D'un autre côté, comme tout point conjugué de a dans ce système doit être sur une génératrice du cône K et qu'il n'y a qu'un tel point sur une génératrice, on peut dire que la cyclique ω est le lieu des conjugués de a.

Ainsi :

Théorème XIX. — *Le lieu des conjugués d'un point a, dans un système donné* V, *est une cyclique située sur une sphère tangente en a à la*

cyclide considérée; le cône qui a cette cyclique pour directrice et le point a pour sommet est circonscrit à la quadrique V.

Remarque. — Soit b un des conjugués de a dans le système V; par la droite ab, on peut mener un et un seul plan tangent à V; ce plan coupe la sphère Ω, qui renferme les conjugués de a, suivant un cercle α qui touche en b la cyclique ω, car la tangente en b à cette cyclique, située sur le cône K, est dans le plan tangent mené à ce cône le long de ab, c'est-à-dire dans le plan considéré.

De plus, ce cercle passe par a et y est tangent à S, puisqu'en a les surfaces S et Ω se touchent.

Ainsi :

Dans le plan mené par deux points a et b, conjugués dans le système V, *tangentiellement à la quadrique* V, *existe un (et évidemment un seul) cercle tangent à la cyclide* S *en ces deux points; ce cercle* α *est sur la sphère* Ω *qui renferme les conjugués de l'un des points dans le système* V.

8. — Définition des groupes de sphères ou de cycliques.

Soit une quadrique fixe V, inscrite à une cyclide S.

Tout cône H du second degré circonscrit à V coupe S suivant deux cycliques (théorème XIII) σ et σ', situées sur deux sphères Σ et Σ'; nous dirons que les sphères telles que Σ et Σ', ou les cycliques telles que σ et σ', font partie d'un même groupe, défini par la quadrique V ou, plus simplement, *du groupe* V.

En d'autres termes, par une cyclique σ du groupe V, on peut faire passer un cône H circonscrit à la quadrique V; et, d'après les résultats du § 6, les deux points où une génératrice de ce cône coupe σ sont conjugués dans le système V. Les sphères qui contiennent les cycliques σ font partie *du groupe* V *de sphères*.

L'équation générale des sphères d'un même groupe V renferme évidemment trois paramètres variables : à savoir, les coordonnées du sommet

du cône H; par suite, dire qu'une sphère appartient à un groupe donné, c'est l'assujettir à une condition.

1° Cela posé, soient Σ une des sphères du groupe V; σ la cyclique suivant laquelle elle coupe S : σ est située par hypothèse sur un cône H, circonscrit à la quadrique V qui définit le groupe.

Une génératrice du cône H coupe σ, comme on vient de le dire, en deux points a et b, conjugués dans le système V; le plan tangent au cône H le long de ab, c'est-à-dire le plan mené par ab tangentiellement à la quadrique V, coupe Σ suivant un cercle α tangent à σ aux points a et b; la cyclique σ est, en effet, à l'intersection du cône H et de la sphère Σ. Le cercle α est donc tangent à S en a et b.

Ainsi toute sphère du groupe V, qui passe par deux points a et b conjugués dans le système V, renferme un cercle α fixe, tangent à la cyclide en ces deux points et dont le plan touche la quadrique V.

2° Inversement, toute sphère passant par le cercle α, défini plus haut, fait partie du groupe V.

Pour le démontrer, considérons sur la droite ab un point quelconque c et circonscrivons de ce point, comme sommet, un cône H à la quadrique V.

Ce cône, d'après ce qui précède, coupe S suivant deux cycliques dont l'une, σ, sera située sur une sphère Σ, faisant partie du groupe V, passant par a et b (§ 6, *Remarque*) et contenant le cercle α; en faisant varier la position du point c sur ab, on trouve ainsi toutes les sphères passant par ce cercle. Il en résulte que, inversement, une quelconque de ces sphères fait partie du groupe V et coupe S suivant une cyclique σ, par laquelle passe un cône circonscrit à V et ayant son sommet sur ab.

Lemme. — *Le lieu des centres des sphères, appartenant à un groupe* V *et passant par un point a de la cyclide* S, *est un cône du second degré* K'.

En effet, soient b un des conjugués de a dans le système V, α le cercle tangent à S en a et b, situé dans le plan mené par ab tangentiellement à V; les sphères du groupe V passant par a sont celles qui passent par les cercles tels que α.

Or nous avons vu à la fin du § 7 (*Remarque*) que ce cercle était situé

sur la sphère Ω, qui renferme les conjugués du point a dans le système V; il en résulte que le lieu des centres des sphères passant par les cercles α est un cône, ayant pour sommet le centre de la sphère Ω, et dont les génératrices sont perpendiculaires aux plans de ces cercles, c'est-à-dire aux plans menés par a tangentiellement à V.

Les centres des sphères du groupe V sont donc sur un cône du second degré, K′ ayant pour sommet le centre de la sphère Ω et supplémentaire du cône K de sommet a circonscrit à la quadrique V.

Remarque. — Parmi les cycliques d'un groupe V figurent les cycliques planes, intersection de S et des plans tangents à la quadrique V; en effet, une cyclique du groupe V est, par définition, sur un cône quelconque circonscrit à cette quadrique; si le sommet du cône est un point de V, le cône circonscrit se réduit au plan tangent en ce point. Il est clair qu'il n'y a pas dans le *groupe* V d'autres cycliques planes.

9. — Des cyclides homofocales.

La théorie des cyclides homofocales est intimement liée à celle des points conjugués.

On sait qu'on appelle *cyclides homofocales* les cyclides inscrites à une même développable focale, c'est-à-dire à une développable passant par le cercle à l'infini. Le théorème suivant est fondamental pour l'étude géométrique que nous allons faire de ce système de surfaces.

Théorème. — *Le lieu des centres des sphères de rayon nul qui coupent une cyclide donnée* S *suivant des cycliques appartenant à un même groupe* V *est une cyclide homofocale à* S [1].

Nous diviserons la démonstration de ce théorème en trois parties : soit S′ le lieu cherché.

---

[1] *Remarque.* — Une cyclique σ du groupe V, situé sur une sphère de rayon nul, est sur un cône circonscrit à V, par définition. Ce cône diffère de la sphère de rayon nul contenant la cyclique, car on ne peut circonscrire à une quadrique une sphère de rayon nul que si cette quadrique est de révolution. Or les quadriques V, qui coupent le cercle de l'infini aux mêmes points p, q, r, s, ne sont pas en général des surfaces de révolution.

1° Une droite δ, rencontrant le cercle à l'infini en un point c, coupe S' en deux points à distance finie.

Soient, en effet, a et b les deux points à distance finie où δ coupe S; pour qu'un point a' de δ soit situé sur S', il faut que la sphère de rayon nul de centre a' appartienne au groupe V.

Cette sphère n'est autre chose que le cône isotrope de sommet a' : elle contient donc la droite δ et passe par le point a.

Il en résulte que le point a' est sur le lieu des centres des sphères du groupe V qui passent par a, c'est-à-dire sur le cône du second degré que nous avons rencontré au paragraphe précédent.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante; car, si un point a' de δ est le centre d'une sphère appartenant au groupe V et passant par a, cette sphère contiendra évidemment la droite δ et sera par suite de rayon nul.

En conséquence, il y a sur la droite δ deux points du lieu cherché, a' et b', situés à l'intersection de cette droite et d'un cône du second degré.

Remarquons que le sommet de ce cône K', c'est-à-dire le centre de la sphère Ω qui renferme les conjugués de a dans le système V, est sur la normale en a à la cyclide S (§ 7, théorème XIX).

2° Le cercle à l'infini est une ligne double du lieu S'.

Cherchons, en effet, dans quel cas le point a' se confondra sur la droite δ avec le point c, où cette droite rencontre le cercle à l'infini.

Soit c' un point infiniment voisin de c sur la droite δ; le cône isotrope de sommet c' se décomposera à la limite, quand les points c' et c se confondront en deux plans, dont l'un est le plan du cercle à l'infini, l'autre le plan mené par la droite δ tangentiellement à ce cercle en c.

Le point c' sera un point du lieu S', si ce dernier plan coupe S suivant une cyclique du système V, c'est-à-dire si ce plan touche V (§ 8, *Remarque*).

On en conclut que le point a' se confond avec le point c sur la droite δ, quand cette droite est dans l'un des deux plans tangents qu'on peut mener à V, par la tangente en c au cercle de l'infini. Le lieu S' passe donc par le point c et y touche les deux plans dont on vient de parler; en d'autres termes, le cercle à l'infini est une ligne double de S'.

De cette proposition et de la précédente résulte immédiatement cette conclusion :

Le lieu S' est une cyclide;

De plus, les plans tangents à cette cyclide, le long du cercle de l'infini, touchent la quadrique V.

3° Les cyclides S' et S sont inscrites à la même développable passant par le cercle de l'infini.

Soit, en effet, δ une génératrice de la développable focale circonscrite à S; cette droite touche S en un point a; de plus, le plan P tangent à S en ce point contient δ et touche le cercle de l'infini; par suite, en vertu des propriétés connues des plans tangents au cercle de l'infini, la droite δ est normale à P et à S au point a.

Les deux points a' et b' de la surface S', qui sont sur la droite δ à distance finie, sont, comme on l'a vu (première partie de la démonstration), à l'intersection de cette droite et d'un cône du second degré K', dont le sommet est sur la normale élevée en a à la cyclide S, c'est-à-dire sur la droite δ.

Il en résulte que les deux points, où δ coupe S', sont confondus au sommet a' du cône K'.

Par conséquent, toute génératrice δ de la développable focale circonscrite à S touche S'.

Je dis, de plus, que le plan P, tangent à cette développable le long de δ, est tangent en a' à la cyclide S'.

Pour le démontrer, considérons une droite δ_1, infiniment voisine de δ, passant par a et rencontrant le cercle de l'infini : le plan des droites δ et δ_1 devient à la limite le plan P, tangent en a à la cyclide S. La droite δ_1 coupe S' en deux points à distance finie, situés sur le cône K' (première partie de la démonstration); si le cône K' n'est pas tangent au plan de δ et δ_1 suivant la droite δ, il sera coupé par ce plan suivant deux droites, dont l'une au moins fera avec δ un *angle non nul* et rencontrera δ_1 en un point a'_1, infiniment voisin de a' et situé sur S'. Le plan P, limite du plan des droites δ et δ_1, renferme donc deux tangentes à S' au point a', savoir les droites δ et $a'a'_1$ et, par suite, touche S' en ce point. C. Q. F. D.

Ce raisonnement peut être en défaut si le cône K' touche le plan P

suivant la droite δ ; je dis que le plan P est encore tangent à la cyclide S'. Dans ce cas, en effet : 1° la droite δ est située sur la surface S', puisque les points communs à cette droite et au cône K' sont sur S'; 2° le cône K' étant le supplémentaire du cône K de sommet a, circonscrit à V, et la droite δ étant perpendiculaire au plan P, le cône K sera touché suivant la droite δ par le plan P. Ce plan, qui est tangent au cercle de l'infini, est donc tangent à la quadrique V et, par suite, d'après ce qu'on a vu plus haut, touche la cyclide S' au point c, où la droite δ rencontre le cercle de l'infini (2°). C. Q. F. D.

Le théorème est donc démontré, et nous avons de plus obtenu, au cours de raisonnements, une propriété des plans qui touchent la cyclide S' le long du cercle de l'infini.

Remarque. — *Parmi les surfaces* S, *il y a trois surfaces du troisième degré.*

En effet, si la quadrique V est un paraboloïde V', c'est-à-dire touche le plan de l'infini, la surface S' sera une cyclide touchant ce plan en un quelconque des points du cercle double (2°) ; elle se réduit donc à une surface du troisième degré passant par le cercle à l'infini (§ 1, *Remarque*). Comme trois des quadriques V sont des paraboloïdes, il y aura parmi les surfaces S' trois cyclides du troisième ordre.

Réciproquement, il est clair que la cyclide S' ne sera du troisième degré que si la quadrique V est un paraboloïde ([1]).

Les surfaces S' homofocales à S, que nous venons de rencontrer, sont en nombre simplement infini, comme les quadriques V auxquelles elles correspondent. Nous allons montrer que, inversement, les cyclides homo-

---

([1]) *Remarque II.* — Soient

p, q, r, s les points de rebroussement à l'infini de S;

z le point de rencontre des droites pq et rs;

y et x les points de rencontre de pr et qs, ps et qr.

La cyclide du troisième ordre, T', qui correspond au paraboloïde V' passant par les droites pq et rs (§ 5, *Remarque*), touche en un point quelconque c du cercle de l'infini le plan (autre que le plan de l'infini) mené par la tangente en c à ce cercle tangentiellement à V' (2°). Si donc c est sur la polaire xy du point z par rapport au cercle de l'infini, le plan tangent à T' en c sera le plan de l'infini : il en résulte que la droite xy est sur T'.

focales à une cyclique donnée sont en nombre simplement infini, et nous pourrons en conclure que toute cyclide S', homofocale à S, est le lieu des centres des sphères de rayon nul, coupant cette surface suivant des cycliques d'un même groupe.

10. — Des cercles d'une cyclide [1].

Les focales d'une cyclide sont les lignes doubles de la développable focale circonscrite à cette surface : une de ces lignes suffit pour déterminer la développable.

Par un point de la focale, on peut mener deux plans tangents à la cyclide et au cercle de l'infini; et, par suite, la sphère de rayon nul qui a ce point pour centre est doublement tangente à la cyclide.

Le problème des *focales* est donc un cas particulier du problème des sphères doublement tangentes à une cyclide.

Or une sphère bitangente à une cyclide coupe cette surface suivant une cyclique à deux points doubles, c'est-à-dire suivant deux cercles; l'étude de ces sphères dépend donc de celle des sections circulaires de la cyclide.

Soient, sur une sphère bitangente Σ, les deux courbes α et α' suivant lesquelles elle coupe S; a et b les points communs à ces cercles.

Toute quadrique passant par α et α' coupe en outre S suivant une cyclique, et par suite (théorème XIII) est circonscrite à une quadrique V, inscrite à S.

En particulier, la quadrique formée par les plans des deux cercles doit toucher, le long d'une conique, une des quadriques V : il en résulte que cette quadrique V sera un cône ayant son sommet sur la droite ab, et auquel les plans des deux cercles seront tangents.

Inversement, tout plan tangent à ce cône coupera la cyclide suivant deux cercles. Le cône, en effet, est inscrit à S le long d'une cyclique; et,

---

[1] Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe et dans le suivant sont bien connus, et ont été donnés d'abord par M. Moutard : nous les avons démontrés à nouveau pour les rattacher aux propositions des paragraphes précédents, ou les énoncer sous une forme qui sera utile dans la suite.

par suite, tous ses plans tangents touchent S aux deux points où leur génératrice de contact rencontre cette cyclique.

La section de la cyclide par un plan tangent au cône V a donc deux points doubles à distance finie, et par suite se décompose en deux cercles. C. Q. F. D.

THÉORÈME. — *La cyclide est anallagmatique par rapport au sommet d'un cône* V *inscrit.*

Soient g le sommet de ce cône; a, b, c, d les points où une droite δ issue de g coupe la cyclide.

Cette droite peut être regardée comme tangente à V au point g; on a donc (théorème XVI) $ga.gb = gc.gd$ et la valeur commune de ces produits est la puissance de g par rapport à la sphère qui renferme la cyclique de contact du cône V. Ce produit est donc une constante K^2, quelle que soit la droite δ, issue de g (1). C. Q. F. D.

On a vu tout à l'heure que les deux points de contact avec S d'une sphère bitangente étaient sur une droite passant par le sommet d'un cône V.

Inversement, soient deux points a et b, situés sur une droite issue de g, et tels, que l'un soit le transformé de l'autre dans l'inversion de centre g qui laisse la cyclide invariable; il est clair, d'après les propriétés générales de l'inversion, qu'il existe une sphère tangente à S en ces deux points.

Il y a donc autant de *séries* de cercles sur une cyclide, et autant de *séries* de sphères bitangentes à cette surface, qu'il y a de cônes parmi les quadriques V.

Les cercles d'une même série, c'est-à-dire les cercles dont les plans touchent un cône V, inscrit à S, forment deux systèmes, jouissant des mêmes propriétés que les deux systèmes de droites sur une quadrique.

---

(1) *Remarque.* — Il résulte de là que les deux points a et b de S, situés sur une droite issue de g, et tels que

$$ga.gb = K^2,$$

sont conjugués dans le système défini par le cône V, de sommet g, inscrit à S.

Soit en effet α un cercle de la série; les sphères Σ, Σ_1, Σ_2, ... passant par ce cercle coupent S suivant des cercles β, β_1, β_2, ...

Ces cercles rencontrent α en deux points et ne se rencontrent pas; car, si β et β_1 avaient un point commun, β_1 aurait trois points communs avec la sphère Σ qui contient α et β et serait dès lors sur cette sphère; Σ contiendrait alors trois cercles de la cyclide, ce qui est impossible.

Les sphères Σ'_1, Σ'_2, ... passant par β coupent S, suivant des cercles α_1, α_2, ...; on voit comme tout à l'heure que ces cercles, qui coupent β en deux points, ne rencontrent pas α et ne se rencontrent pas entre eux. Je dis qu'ils coupent les cercles β_1, β_2, ...

En effet, α_1 a deux points communs avec la sphère Σ_1, qui passe par α et β_1; ces points étant sur S, et n'étant pas sur α, seront nécessairement sur β_1.

Ainsi les cercles de la série se divisent en deux systèmes α, α_1, α_2, ... et β, β_1, β_2, ...; deux cercles de même système ne se rencontrent pas, deux cercles de systèmes différents ont deux points communs.

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide, est une quadrique ayant même centre que cette surface.*

1° En effet, toute sphère passant par un des cercles de la cyclide, appartenant à la série définie par un cône inscrit V, est bitangente à S; le lieu des centres cherché est donc le lieu des axes de ces cercles.

Or, deux cercles de système différent se rencontrant en deux points sont sur une sphère, et par suite leurs axes se coupent : les axes des cercles de la série forment donc deux systèmes, tels que les droites de l'un rencontrent toutes les droites de l'autre, et le lieu de ces droites est une quadrique D, qu'on nomme *déférente*.

2° Soient maintenant trois sphères Σ, Σ' et Σ'' bitangentes à S aux points a et b, a' et b', a'' et b'', et infiniment voisines : elles ont deux points communs, infiniment voisins de a et b; et la droite de ces points est perpendiculaire au plan des centres des trois sphères. On en conclut que, si une sphère Σ, de centre c, touche S aux points a et b, la droite ab est per-

pendiculaire au plan tangent à la déférente D, au point c. En d'autres termes, la déférente est l'enveloppe des plans perpendiculaires, en leur milieu, aux droites qui joignent les points de contact des sphères bitangentes d'une même série.

Or soit δ une droite issue du sommet g, du cône V et coupant S en a, b, c, d : les plans perpendiculaires à δ au milieu des segments ab et cd touchent D; il en résulte que le centre de D est dans le plan élevé à δ au centre des moyennes distances des quatre points et par suite, puisque δ est une droite quelconque issue de g, coïncide avec le centre de S (théorème II).

La puissance du point g par rapport aux sphères bitangentes d'une même série est la valeur des produits $ga.gb$, c'est-à-dire la constante K^2. Il en résulte que ces sphères sont orthogonales à une sphère de centre g et de rayon K, qu'on nomme *sphère directrice*.

La cyclique intersection de la sphère directrice et de la déférente correspondante est une focale de la cyclide, puisque les sphères bitangentes qui ont leur centre sur cette courbe sont, d'après ce qui précède, de rayon nul.

11. — DES POLES PRINCIPAUX ET DES FOCALES D'UNE CYCLIDE.

La recherche des focales se réduit donc à celle des cônes qui font partie du système des quadriques V : nous admettrons, ce qui est à peu près évident, puisque l'équation générale de ces quadriques renferme un paramètre variable, qu'il y a des cônes parmi elles.

A un de ces cônes correspondra une cyclique focale, ayant pour centre le sommet du cône et, inversement, toute cyclique focale aura pour centre le sommet d'un cône inscrit à V.

Soient V_1 l'un de ces cônes, g_1 son sommet, φ_1 la focale correspondante, située à l'intersection de la sphère directrice C_1 et de la déférente D_1.

φ_1 est une ligne double de la développable focale circonscrite à S; en d'autres termes, les deux plans que l'on peut mener tangentiellement au cercle de l'infini par une tangente de φ_1 touchent S. Il en résulte que tout

plan tangent à φ_1 et au cercle de l'infini est tangent à S : inversement, il est clair que tout plan tangent au cercle de l'infini et à S touche φ_1.

Par conséquent, toute sphère de rayon nul, doublement tangente à φ_1, est bitangente à S, et, inversement, toute sphère de rayon nul, bitangente à S et ayant son centre en dehors de φ_1, est doublement tangente à cette courbe.

En d'autres termes, les focales de la cyclide sont : 1° la cyclique φ_1 ; 2° les courbes focales de φ_1. Or M. Darboux a démontré géométriquement qu'une cyclique a quatre cycliques focales, et que ces cinq courbes sont focales les unes des autres. Une cyclide a donc cinq focales.

Nous appellerons φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 ces cinq focales; g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 leurs centres : ces points, par rapport auxquels la cyclide est anallagmatique, seront dits *pôles principaux* de la surface.

Quatre des pôles principaux sont les sommets des quatre cônes qui passent par la focale, ayant pour centre le cinquième pôle principal, comme l'a montré M. Moutard.

Il résulte de là que le tétraèdre des points g_2, g_3, g_4, g_5 est autopolaire par rapport à la sphère c_1 de centre g_1, et par suite les hauteurs du tétraèdre formé par quatre pôles principaux se coupent en un même point, qui est le cinquième pôle principal.

Supposons données les cinq focales d'une cyclide : ces courbes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre : une d'elles suffit pour déterminer les autres; mais la cyclide correspondante est indéterminée.

Si l'on se donne une des déférentes, c'est-à-dire une quadrique passant par une de ces focales, la cyclide sera déterminée comme l'enveloppe de sphères ayant leur centre sur la déférente, et coupant à angle droit la sphère directrice correspondante.

Il en résulte que les cyclides homofocales à une cyclide donnée S sont en nombre simplement infini, et par suite coïncident avec les cyclides S′, que nous avons rencontrées.

12. — Des cercles bitangents a une cyclide.

Avant de faire des applications des propositions démontrées plus haut, il nous reste à introduire une nouvelle définition, celle des *groupes* de cercles bitangents à une cyclide.

Par deux points d'une cyclide, a et b, on peut faire passer un cercle touchant la cyclide en ces deux points : les plans tangents à la surface en a et b se coupent en effet suivant une droite δ; et cette droite rencontre en un point c le plan élevé perpendiculairement à ab en son milieu. Les tangentes à S, ca et cb, sont donc égales; par suite, il existe dans le plan cab un cercle α touchant la cyclide en a et b.

On peut donc mener, en général, un et un seul cercle tangent à la cyclide en deux points donnés de cette surface.

Nous appellerons *cercles bitangents d'un même groupe* V les cercles dont les deux points de contact avec S sont conjugués dans le système V.

Or nous avons vu au § 8 (1°) qu'il existe un cercle touchant une cyclide en deux points a et b conjugués dans le système V; ce cercle, dont le plan est tangent à la quadrique V, est sur la sphère qui renferme les conjugués du point a dans le système V.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XXI. — *Les plans des cercles bitangents d'un même groupe* V *touchent la quadrique* V; *ceux de ces cercles qui passent par un point de la cyclide sont sur la sphère qui contient les conjugués de ce point dans le système* V.

De même, la proposition démontrée (2°), au § 8, permet d'énoncer cet autre théorème :

Théorème XXII. — *Toute sphère, passant par un cercle bitangent du groupe* V, *appartient au groupe* V *de sphères.*

Les réciproques de ces deux théorèmes sont également vraies; elles sont renfermées dans un seul énoncé.

Théorème XXIII. — *Toute cyclique plane ou gauche du groupe* V,

située sur la cyclide S, *admet une série de cercles bitangents appartenant au groupe* V ; *les deux points de contact d'un de ces cercles et de la cyclique sont sur une droite passant par un pôle principal de la courbe.*

Soit d'abord une cyclique gauche du groupe V, σ, à l'intersection de S et d'une sphère Σ : l'un H, des quatre cônes qui passent par cette cyclique, est circonscrit à V, et ses plans tangents coupent Σ suivant des cercles bitangents à σ et par suite à S. Les deux points de contact d'un de ces cercles étant à l'intersection de Σ et d'une des génératrices du cône considéré, H, sont (§ 6, *Remarque*) conjugués dans le système V ; ces cercles font donc partie du groupe V de cercles bitangents à S. C. Q. F. D.

Soit maintenant σ une cyclique plane du groupe V, c'est-à-dire située à l'intersection de S et d'un plan P, tangent à V au point g. Ce point est un pôle principal de σ (théorème XV), et l'on a, en désignant par a, b, c, d les points où une droite δ issue de g dans le plan P coupe σ (§ 5 et 6) (théorème XVI),

$$ga \,.\, gb = gc \,.\, gd = \text{const.}$$

Par suite, les tangentes à σ en a et b sont également inclinées sur δ, et il existe un cercle tangent à la cyclique en ces points : a et b étant d'ailleurs conjugués dans le système V en vertu de la relation précédente, ce cercle fait partie du groupe V. C. Q. F. D.

Remarque I. — Les raisonnements précédents supposent essentiellement qu'il n'existe qu'un seul cercle tangent à la cyclide en deux points a et b de cette surface, c'est-à-dire que les plans tangents à S en a et b et le plan perpendiculaire au milieu de la droite ab se coupent en un seul point ; s'ils se coupent suivant une droite, c'est-à-dire si les deux premiers plans sont symétriques par rapport au troisième, il existe une sphère tangente à S aux points a et b, et tout cercle de cette sphère passant par ces points est bitangent à la cyclide.

En ce cas, la droite ab passe (§ 10) par le sommet g_1 d'un cône V_1 inscrit à S, et les points a et b sont conjugués dans le système V_1 ; les cercles bitangents à S en a et b font partie du groupe V_1.

Je dis que les théorèmes XXI, XXII et XXIII subsistent pour ces cercles. En effet :

1° Le plan d'un de ces cercles passe par le sommet g_1 du cône V_1, qu'il coupe suivant deux droites; il peut donc être considéré analytiquement comme tangent à cette quadrique.

2° Soit une sphère Σ passant par un de ces cercles : elle appartient au groupe V_1 de sphères. En effet, la puissance de g_1 par rapport à Σ, c'est-à-dire le produit $g_1 a . g_1 b$ est égal à K_1^2 (K_1 étant le rayon de la sphère directrice du centre g_1) ; il en résulte que les points de la cyclique σ commune à S et à Σ sont deux à deux sur des droites issues de g_1, c'est-à-dire que cette cyclique est sur un cône du second ordre H, de sommet g_1. De même la sphère Σ coupe la cyclique de contact de S et du cône V_1 en quatre points appartenant à σ, et situés deux à deux sur deux droites δ_1 et δ_2 issues du point g_1.

On en conclut aisément que les cônes H et V_1 se touchent le long des droites δ_1 et δ_2; ils sont donc inscrits l'un à l'autre le long de la conique formée par deux droites. C. Q. F. D.

3° Le théorème XXIII subsiste sans nouvelle démonstration.

Remarque II. — Il résulte de ce qui vient d'être dit (*Remarque I,* 2°) que toute sphère Σ, par rapport à laquelle la puissance du point g_1 est égale à K_1^2, appartient au groupe V_1 ; et réciproquement.

Remarque III. — On peut dire, d'une manière générale, en se reportant aux théorèmes XX et XXII, que :

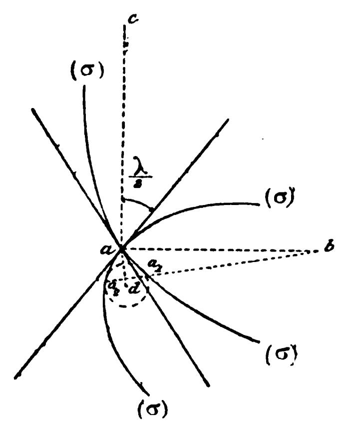
Le lieu des centres des sphères de rayon nul, qui passent par les cercles bitangents à une cyclide et appartenant à un même groupe, est une cyclide homofocale à la première.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par S_V la cyclide lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe, V, par rapport à une cyclide S.

13. — Des lignes de courbure des cyclides.

Lemme. — *Il existe trois quadriques distinctes inscrites à une cyclide et tangentes à un plan qui touche cette surface.*

En effet, soit P un plan touchant la cyclide S de centre o au point a; nous savons qu'il existe quatre quadriques V tangentes à ce plan (théorème XV); parmi elles figure la quadrique inscrite à S suivant une cyclique de centre o et de rayon oa, et cette quadrique doit être comptée deux fois, puisque le point a est situé sur l'enveloppe des quadriques V. Il n'y a donc que



trois quadriques distinctes tangentes au plan P : nous appellerons V′ et V″ celles qui ne passent pas par le point a.

Cela posé, soient b et c les points où les quadriques V′ et V″ touchent le plan P : ces points (théorème XV) sont des pôles principaux de la cyclique σ suivant laquelle ce plan coupe S. La cyclique σ a un point double en a et pour tangentes en ce point les asymptotes de l'indicatrice. Cette courbe est à elle-même sa transformée par rayons vecteurs réciproques, quand on prend pour pôle le point b (ou c); et, d'après les propriétés des cycliques planes, la puissance d'inversion correspondante est égale à $\overline{ba}^2$ (ou $\overline{ca}^2$).

Il en résulte que le point a est à lui-même son transformé dans cette inversion; par suite :

1° Les tangentes à la cyclique σ en a sont également inclinées sur les lignes ab et ac.

Ces droites sont ainsi les bissectrices de l'angle des asymptotes de l'indicatrice au point a et par suite sont les axes de cette courbe.

2° La cyclique σ appartient aux groupes V′ et V″; elle admet donc une série de cercles bitangents appartenant à ces groupes; les deux points de contact a_1 et a_2 d'un des cercles bitangents du groupe V′ sont (théorème XXIII) sur une droite passant par b; on a

$$ba_1 . ba_2 = \overline{ba}^2.$$

Si a_1 se rapproche de a, a_2 s'en rapproche également; le rayon du cercle bitangent en ces deux points tend vers zéro et son centre décrit évidemment une courbe normale à la droite ab au point a.

On déduit de là les théorèmes suivants :

Théorème XXIV. — *Le point de contact avec une cyclide* S *d'un plan qui roule sur cette surface et sur une quadrique qui lui est inscrite est une ligne de courbure de la cyclide* ([1]).

Soit en effet V′ cette quadrique; un plan P, qui touche S en a et V′ en b, a pour caractéristique la droite ab; la tangente à la courbe de contact avec S de la développable $\boxed{V', S}$ est la conjuguée de ab par rapport à l'indicatrice en a, c'est-à-dire, puisque ab est un des axes de cette courbe, la tangente à une des lignes de courbure au point a.

Remarque. — Il ne s'agit pas dans ce qui précède des plans qui touchent V′ et S le long de la cyclique suivant laquelle la quadrique est inscrite à S : le raisonnement suppose en effet que les points a et b sont distincts.

Réciproquement : *Les plans tangents à une cyclide le long d'une ligne de courbure touchent une quadrique inscrite à la surface.*

([1]) Ce théorème a été énoncé partiellement par M. Ribaucour (*Comptes rendus* du 25 juin 1872), et complété, sous une forme différente, par M. Darboux, *loc. cit.*, p. 336.

Soit, en effet, α une ligne de courbure passant par le point a. Les développables $\boxed{V', S}$ et $\boxed{V'', S}$ touchent S suivant deux lignes de courbure passant par a, et dont l'une sera la ligne α.

THÉORÈME XXV. — *Deux cyclides homofocales se coupent suivant une ligne de courbure* (¹).

En effet, soit a un point commun à deux cyclides homofocales S et $S_{V'}$; la sphère de rayon nul de centre a (théorème XX) coupe S suivant une cyclique σ' appartenant à un groupe fixe V', V' étant une quadrique inscrite à S; en d'autres termes, on peut faire passer par cette cyclique un cône H, n'ayant pas son sommet en a et circonscrit à V'. La courbe σ' ayant un point double au point a, le plan tangent à S en ce point touche le cône H et, par suite, la quadrique V'. C. Q. F. D.

THÉORÈME XXVI. — *Les cyclides homofocales se coupent à angle droit.*

Gardons les notations précédentes. Le plan P tangent à S au point a, commun à S et à $S_{V'}$, touche la quadrique V' en un point b; ce plan coupe S suivant une cyclique σ, qui admet une série de cercles bitangents, appartenant au groupe V', et dont les centres décrivent une courbe normale à la droite ab au point a, c'est-à-dire tangente à l'intersection de S et de $S_{V'}$ (2°, § 13). Les centres des sphères de rayon nul passant par ces cercles sont sur $S_{V'}$ (théorème XX). (Voir la *fig.* précédente.)

Soit un de ces cercles α, ayant pour centre un point d, infiniment voisin de a; la droite ad a pour limite la perpendiculaire à ab; le rayon ρ du cercle α est la distance de d à l'une des deux tangentes en a à la courbe σ; on a évidemment

$$\rho = ad \sin\frac{\lambda}{2},$$

(¹) On remarquera que nous démontrons ce théorème sans faire usage du théorème de Dupin.

λ étant l'angle de ces deux tangentes, qui sont également inclinées sur ab (théorème XXIV).

En élevant en d une perpendiculaire au plan P de la cyclique, égale à $\pm \rho\sqrt{-1}$, on obtient deux points d_1 et d_2, centres des deux sphères de rayon nul passant par le cercle α et situés, par suite, sur $S_{V'}$.

La droite ad_1 fait avec ad un angle μ, tel que l'on ait (par le triangle add_1) $dd_1 = ad \operatorname{tang}\mu$, ou

$$\sin\frac{\lambda}{2}\sqrt{-1} = \operatorname{tang}\mu,$$

c'est-à-dire un angle fini.

Les droites ad_1, ad_2 sont donc, à la limite, deux tangentes *différentes* à la surface $S_{V'}$ au point a, et leur plan a pour limite le plan tangent à $S_{V'}$ en ce point. D'un autre côté, ce plan étant mené par ad perpendiculairement au plan P a pour limite le plan perpendiculaire à ab au point a. En d'autres termes, la droite ab est normale en a à la cyclide $S_{V'}$, ce qui démontre le théorème.

On peut de plus énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME XXVII. — *Par un point d'une cyclide passent deux cyclides homofocales à la proposée; ces deux surfaces sont normales aux lignes de courbure de la première au point donné.*

Remarque. — Les cyclides homofocales ont mêmes focales et, par suite, mêmes pôles principaux et mêmes sphères directrices; nous allons démontrer la proposition suivante :

Parmi les cyclides homofocales à une cyclide S *figurent les cinq sphères directrices.*

En effet, soient V_1 un cône inscrit à S, g_1 son sommet, C_1 la sphère directrice correspondante, de rayon K_1; par rapport à toute sphère du groupe V_1 (§ **12**, *Remarque II*), la puissance de g_1 est égale à K_1^2; si donc une de ces sphères a un rayon nul, son centre sera à la distance K_1 du point g et sera, dès lors, sur la sphère directrice C_1.

Cette sphère est donc le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe V_1. C. Q. F. D.

On en conclut que les cinq sphères directrices coupent orthogonalement les cyclides homofocales correspondantes [1].

14. — Propriétés des sphères d'un même groupe.

Le théorème du paragraphe précédent donne lieu à de nombreuses applications : les plus intéressantes sont relatives aux propriétés focales des cycliques, situées sur une cyclide et plus spécialement des cycliques d'un même groupe.

Ce sont ces propriétés que nous allons tout d'abord exposer ; nous donnerons ensuite quelques théorèmes relatifs aux contacts d'une cyclide avec les sphères d'un même groupe, et nous en déduirons une génération nouvelle de lignes de courbure.

Théorème 1. — *Les quatre focales d'une cyclique située sur une cyclide sont respectivement sur quatre cyclides homofocales à la première.*

Car une focale d'une cyclique est le lieu des centres des sphères de rayon nul, passant par les cercles d'une même série bitangents à cette courbe ; ces sphères appartiennent à un même groupe (théorème XXII) et, par suite (théorème XX), leurs centres sont sur une cyclide homofocale à S.

Plus généralement on peut énoncer la propriété suivante des cycliques d'un même groupe :

Théorème 2. — *Les cycliques d'un même groupe* V, *situées sur une cyclide, ont une de leurs focales sur une cyclide homofocale à la première.*

---

[1] La plupart de ces résultats ont été énoncés par M. Moutard (*Soc. Phil.*, 31 juillet 1864 ; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er août 1864) et par M. Darboux (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er août 1864).

Cette cyclide est le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe V, c'est-à-dire la cyclide S_V.

THÉORÈME 3. — *Les cycliques d'un même groupe, situées sur une cyclide, ont quatre de leurs foyers sur une cyclide homofocale à la première.*

Car les foyers d'une cyclique sont à l'intersection de la sphère qui contient cette courbe et de quatre focales.

On sait que chacune de ces focales coupe orthogonalement la sphère qui contient la cyclique considérée ; si nous appelons *foyers associés* d'une cyclique les quatre foyers situés sur une même focale de cette courbe, nous pouvons énoncer la propriété suivante :

THÉORÈME 4. — *Par quatre foyers associés de la courbe, commune à une cyclide et à une sphère, passe une cyclide homofocale à la première, et normale à la sphère en ces points.*

Nous verrons plus loin qu'une sphère est normale à une cyclide en quatre points seulement ; il en résulte que :

Le lieu des foyers des courbes, communes à une sphère fixe et à une série de cyclides homofocales, coïncide avec le lieu des points où cette sphère est normale à ces cyclides ;

Le lieu des foyers des courbes, communes à une série de sphères concentriques et à une série de cyclides homofocales, coïncide avec le lieu des points de contact des plans menés tangentiellement aux cyclides par le centre des sphères.

THÉORÈME 5. — *Si l'on coupe une cyclide par un plan tangent à une quadrique* V *inscrite à cette surface :*

1° *Quatre des foyers de la courbe d'intersection sont équidistants du point de contact ;*

2° *Le lieu de ces quatre foyers, quand le plan se déplace en restant tangent à* V, *est une cyclide homofocale à la première.*

Car : 1° un plan P tangent à V en g coupe S suivant une cyclique σ admettant g comme pôle principal (théorème XV).

Les cercles bitangents à σ en deux points, situés sur une droite issue de g, font partie du groupe V (théorème XXIII); on sait que, parmi ces cercles, quatre ont un rayon nul et sont situés sur un cercle de centre g; *les centres de ces quatre cercles sont des foyers de* σ.

2° Les sphères de rayon nul ayant ces points pour centres appartiennent au groupe V et, par suite, ils sont sur la cyclide S_V. C. Q. F. D.

On démontrerait, comme plus haut, les propriétés suivantes :

Le lieu des foyers des sections, faites par un même plan dans une série de cyclides homofocales, coïncide avec le lieu des pieds des normales à ces surfaces, contenues dans le plan.

Le lieu des foyers des sections, faites dans une série de cyclides homofocales par une série de plans parallèles, coïncide avec le lieu des pieds des normales qu'on peut mener aux cyclides, parallèlement aux plans considérés.

Parmi les sphères appartenant à un même groupe par rapport à une cyclide S, il en est qui sont susceptibles d'une définition géométrique simple, comme le montrent les théorèmes suivants :

THÉORÈME 6. — *Les sphères tangentes à une cyclide* S, *en un point donné* a, *appartiennent à deux mêmes groupes.*

En effet, soient V′ et V″ les deux quadriques inscrites à S, qui touchent, en des points différents de a, le plan tangent à la cyclide en ce point.

Nous avons vu (§ 13, 2°) que le cercle de rayon nul, de centre a, pouvait être considéré comme un cercle bitangent, appartenant aux groupes V′ et V″; les sphères tangentes à la cyclide en a renferment ce cercle et, par suite, appartiennent (théorème XXII) aux groupes V′ et V″ de sphères.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 6 *bis*. — *Les sphères tangentes à une cyclide en tous les points d'une ligne de courbure appartiennent à un même groupe.*

La démonstration est la même que pour le théorème précédent; le groupe auquel appartiennent les sphères dont il est question est défini

par la quadrique V′ que touchent les plans tangents à la cyclide le long de la ligne de courbure considérée.

Les Théorèmes **6** et **6** *bis* peuvent s'énoncer ainsi :

Par toute cyclique σ, située à l'intersection d'une cyclide S *et d'une sphère tangente à* S *en un point donné a, passent deux cônes du second ordre circonscrits respectivement à deux quadriques* V′ *et* V″, *qui sont inscrites à* S *et touchent le plan tangent à la cyclide en a.*

Par toute cyclique σ, située à l'intersection d'une cyclide S *et d'une sphère tangente à* S *en un point quelconque a, d'une ligne de courbure donnée, passe un cône du second ordre circonscrit à une quadrique* V′, *qui est inscrite à* S *et qui touche le plan tangent à la cyclide en a.*

Il est clair que, si l'on désigne par *b* le point de contact de la quadrique V′ et du plan qui touche S au point *a*, le cône du second ordre qui passe par la cyclique σ aura son sommet sur la droite *ab*. Cette remarque nous sera utile tout à l'heure.

En combinant les théorèmes **2**, **6** et **6** *bis*, on obtient immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME 7. — *Toute cyclique, située à l'intersection d'une cyclide* S *et d'une sphère tangente à cette surface en un point a, a deux de ses focales situées respectivement sur les deux cyclides homofocales à* S *qui passent par a.*

Parmi les sphères qui touchent une cyclide en un point *a*, il faut distinguer les deux sphères qui ont pour rayons les rayons de courbure principaux au point *a* : nous les appellerons, pour abréger, *sphères de courbure.*

Désignons toujours par P le plan tangent à S en *a*; par V′ et V″ les deux quadriques inscrites à S qui touchent P en des points différents de *a*.

La sphère Ω′, tangente à S en *a*, qui renferme les conjugués de ce point dans le système V′, coupe S suivant une cyclique, σ′, situé sur un cône K′, de sommet *a*, circonscrit à V′ (§ 7). Les deux tangentes à la cyclique σ′ au point *a* sont donc les deux génératrices du cône K′ situées dans le plan P :

or P touche la quadrique V', et par suite le cône K'; la sphère Ω' coupe ainsi S suivant une courbe ayant un point de rebroussement en a; cette sphère est donc une des sphères de courbure au point a. Par suite :

Soient a un point quelconque d'une cyclide S; V' *et* V'' *les quadriques inscrites à* S *qui touchent le plan tangent à la cyclide au point a. Les sphères* Ω' *et* Ω'' *qui renferment les conjugués de a dans les systèmes* V' *et* V'' *sont les sphères de courbure en ce point.*

Ou encore :

Soient σ' et σ'' *les cycliques communes à la cyclide* S *et aux deux sphères de courbure en un point a de cette surface : les deux cônes du second ordre de sommet a qui passent par les courbes* σ *et* σ' *sont respectivement circonscrits aux quadriques* V' *et* V'', *qui sont inscrites à* S *et touchent le plan tangent en a à cette cyclide.*

On peut dire également que :

Si un point a se meut sur une ligne de courbure d'une cyclide, une des sphères de courbure en ce point renferme les conjugués de a dans un système fixe.

Ce système est défini par la quadrique V que touchent les plans tangents à S le long de la ligne de courbure considérée.

Remarque. — Pour abréger, nous désignerons par γ_V la ligne de courbure le long de laquelle les plans tangents à la cyclide touchent la quadrique V.

Théorème XXVIII. — *Si, par un cercle* α *bitangent à la cyclide* S *et appartenant à un groupe* V, *on fait passer une sphère* Σ *tangente à* S *en un point m non situé sur* α, *ce point est sur la ligne de courbure* γ_V.

En effet, la cyclique σ commune à Σ et à S est située (théorème XXII) sur un cône H du second ordre, circonscrit à V, et ayant son sommet sur la droite qui joint les points de contact, a et b, de S et de α (§ 8, 2°) : ce sommet est donc différent du point m.

Il en résulte que le cône H touche la cyclide en m, puisque σ a par hy-

pothèse un point double en ce point : en d'autres termes, le plan tangent à S au point m touche V ; m est donc sur la ligne de courbure γ_v.

C. Q. F. D.

On peut aller plus loin, et déterminer la tangente à la ligne de courbure au point m, par une construction très simple.

Considérons en effet le cercle β qui passe par les points a, b, m : ce cercle est sur la sphère Σ et touche par suite la cyclide S au point m.

D'ailleurs les points a et b étant conjugués dans le système V par hypothèse, il en sera de même des deux autres points, confondus en m, où le cercle β rencontre la cyclide (théorème XVII); en d'autres termes, la tangente au cercle β au point m touche la quadrique V.

Or le plan P, tangent à Σ (ou à S) au point m, touche V, comme on vient de le démontrer, en un point que nous désignerons par n.

Il en résulte que la tangente au cercle β en m passe par le point n, puisque cette tangente est dans le plan P et touche la quadrique V.

D'un autre côté, nous savons (§ 13) que la ligne de courbure γ_v coupe à angle droit la droite mn au point m; on peut donc dire que :

La tangente à la ligne de courbure γ_v au point m coupe à angle droit le cercle qui passe par les points a, b, m.

On en déduit pour les lignes de courbure d'une cyclide un mode nouveau de génération :

THÉORÈME 8. — *Les sphères d'une même série doublement tangentes à une cyclique σ, située sur une cyclide* S, *et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure.*

Soient a, b et m les points de contact d'une de ces sphères avec σ et avec S; *la ligne de courbure coupe à angle droit au point m le cercle qui passe par les points a, b et m.*

Ce théorème résulte immédiatement des considérations précédentes et des théorèmes XXII et XXIII.

Il faut entendre, par sphères d'une même série bitangentes à une cyclique, les sphères qui passent par les cercles d'une même série bitangents

à cette courbe; de plus, le point de contact d'une des sphères avec S ne doit pas être sur la cyclique σ.

15. — Des focales singulières des cyclides.

On nomme *focales singulières d'une cyclide* les lignes doubles de la développable circonscrite à cette surface suivant le cercle à l'infini.

Théorème XXIX. — *Les focales singulières d'une cyclide sont les focales ordinaires d'une quadrique ayant même centre que cette surface* (1).

En effet, soient S et S_V deux cyclides homofocales; nous avons vu que les plans tangents à S_V le long du cercle à l'infini touchaient une quadrique V inscrite à S (§9, 2°) : les focales singulières de S_V sont donc les focales de V, c'est-à-dire trois coniques.

Je dis que le centre de S_V coïncide avec celui de V.

Soit, en effet, c un point du cercle à l'infini;

Les deux plans tangents à S_V en ce point se coupent suivant la tangente au cercle, ils sont donc parallèles; et le centre de V est situé dans un plan P de même direction, équidistant des deux premiers :

Ce plan P est, en d'autres termes, le conjugué harmonique du plan de l'infini par rapport aux plans tangents à la cyclide S_V en c; et le point commun aux plans tels que P étant (théorème III) le centre de la cyclide S, le théorème est démontré. C. Q. F. D.

On peut donc dire que :

Le lieu des centres des sphères de rayon nul d'un groupe V *est une cyclide, homofocale à la cyclide considérée,* S, *et ayant pour centre et pour focales singulières le centre et les focales de la quadrique* V.

Nous avons vu (théorème XXVI et XXVII) que la cyclide S_V avait pour normale en un point a de son intersection avec S une droite ab, tangente à la quadrique V. On peut donc énoncer ce théorème :

---

(1) Ce théorème est dû à M. Laguerre.

THÉORÈME. — *Le long de la ligne de courbure commune à deux cyclides les normales à l'une touchent une quadrique inscrite à l'autre, et ayant pour focales les focales singulières de la première.*

16. — PROPRIÉTÉS DES COUPLES DE POINTS CONJUGUÉS.

Étant données deux cyclides homofocales, nous savons que l'une, S_V, est le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un groupe V par rapport à l'autre, S; et qu'inversement S est le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un groupe U par rapport à S_V. Il existe entre les surfaces S, S_V et les quadriques V et U une relation de réciprocité remarquable, que les développements suivants vont mettre en lumière.

Lemme. — Soient α un quelconque des cercles bitangents à S, appartenant au groupe V; c et d les centres des deux sphères de rayon nul qui passent par ce cercle.

Les deux points c et d, situés sur une cyclide S_V, *homofocale à* S (théorème XX et XXII), *sont sur cette cyclide conjugués dans un même système.*

Nous diviserons la démonstration de ce lemme en trois parties.

Soient deux cercles α et α', bitangents à S, aux points a et b, a' et b', conjugués dans un système V; c et d, c' et d' les centres des sphères de rayon nul qui contiennent respectivement ces cercles.

Le plan des cercles α, α' sont respectivement *perpendiculaires* aux droites cd, $c'd'$ en leurs milieux.

1° Si les points a, b, a', b' sont en ligne droite, les points c et d, c' et d' sont conjugués sur S_V dans un même système.

En effet, le plan du cercle α, comme celui du cercle α', est le plan mené par la droite ab tangentiellement à V (théorème XXI).

Ce plan étant perpendiculaire aux segments cd et $c'd'$ en leurs milieux, les quatre points c, d, c', d' sont sur un cercle. On en conclut (théorème XVII) que c et d, c' et d' sont conjugués sur S_V dans un même système.

2° Il en est de même si la droite ab rencontre la droite $a'b'$; soit en effet l le point de rencontre. Le cône H, de sommet l, circonscrit à V coupe S suivant deux cycliques σ et σ'; les points a et b sont sur une de ces courbes de même que les points a' et b' (*Remarque*, § 6). Supposons d'abord que les quatre points a, b, a', b' soient sur la même cyclique σ, située sur une sphère Σ.

Le plan du cercle α est (théorème XXI) tangent à la quadrique V, et par suite touche le cône H le long de ab : la tangente à σ en a (ou b) étant l'intersection du plan tangent à S en ce point et du plan tangent à H le long de ab, on voit que le cercle α touche σ aux points a et b. Le cercle α ayant ainsi quatre points communs avec la sphère Σ est situé sur cette sphère. Il en est de même du cercle α'.

Les droites cd et $c'd'$ qui sont les axes des cercles α et α' sont donc dans un même plan.

De plus, la sphère de rayon nul de centre c contenant le cercle α, la puissance du point l par rapport à cette sphère a pour expression soit $\overline{lc}^2$, soit le produit $la.lb$: on a donc

$$\overline{lc}^2 = la.lb,$$

et de même

$$\overline{ld}^2 = la.lb,$$

$$\overline{lc'}^2 = la'.lb',$$

$$\overline{ld'}^2 = la'.lb'.$$

On a, en outre, $la.lb = la'.lb'$, puisque a, b, a', b' sont sur une sphère Σ. Les points c, d, c', d' sont donc sur une sphère de centre l : étant d'ailleurs dans un plan, ils sont sur un même cercle. C. Q. F. D.

Si les points a et b sont sur la cyclique σ, et a' et b' sur la cyclique σ', les deux autres points a'' et b'' où la droite $a'b'$ coupe S sont sur σ; soit α'' le cercle tangent à S en ces deux points, c'' et d'' les centres des deux sphères de rayon nul passant par α''.

Les points c et d, c'' et d'' sont sur un cercle d'après ce qui vient d'être démontré;

Les points c' et d', c'' et d'' sont également sur un cercle (1°).

Il en résulte immédiatement (théorème XVII) que les points c et d, c et d', c'' et d'' sont, sur S_V, conjugués dans un même système.

3° Le lemme est encore vrai si les droites ab et $a'b'$ ne se rencontrent pas.

En effet, on peut toujours mener à la quadrique V une tangente rencontrant ces deux droites.

Soient e et f deux points, conjugués dans le système V, communs à cette tangente et à S; β le cercle tangent à S en ces deux points, c_1 et d_1 les centres des deux sphères de rayon nul contenant β.

Les points c et d, c_1 et d_1 sont (2°), sur S_V, conjugués dans le même système; et de même les points c' et d', c_1 et d_1 : c et d, c' et d' le sont donc également.

Appelons U le système dans lequel sont conjugués sur S_V les points c et d; à deux points de S, a et b, conjugués dans le système V, correspondent deux points c et d, de S_V, conjugués dans le système U. La relation qui lie ces points est la suivante :

c et d sont les centres des sphères de rayon nul passant par le cercle qui touche S_V *aux points a et b.*

Je dis qu'elle est *réciproque,* c'est-à-dire que :

Les points a et b sont les centres des sphères de rayon nul passant par le cercle qui touche S_V *aux points c et d.*

Soit en effet sur la droite ab un point m quelconque : par ce point menons à la quadrique V une tangente infiniment voisine de ab ; soient a' et b' les points voisins de a et de b où cette tangente coupe la cyclide S.

Aux points a' et b' correspondent sur S_V deux points c' et d', voisins de c et d; les quatre points c, d, c', d' sont sur un cercle (lemme, 2°) situé sur une sphère de centre m.

A la limite, si $a'b'$ se confond avec ab, les points c' et d' se confondent avec les points c et d, le cercle γ de ces quatre points devient tangent à la cyclide S_V en c et d.

Ce cercle, étant d'ailleurs sur une sphère ayant pour centre un point quelconque m de la droite ab, a cette droite pour axe; de plus, les points c et d étant par hypothèse à distance nulle de a et de b, la sphère de centre a (ou b) qui passe par le cercle γ a un rayon nul. C. Q. F. D.

Il en résulte que la cyclide S est le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe U, par rapport à la cyclide S_V; par conséquent, la quadrique U, inscrite à S_V, a pour centre et pour focales le centre et les focales singulières de S [(théorème XXIX) et (§ **15**)].

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants :

Théorème XXX. — *Les axes des cercles d'un même groupe* V, *bitangents à une cyclide* S, *touchent une quadrique* U, *ayant pour centre et pour focales le centre et les focales singulières de la cyclide.*

Car ces axes sont les droites, telles que cd, qui touchent la quadrique U, puisque les points c et d sont conjugués sur S_V dans le système U.

Théorème XXXI. — *Les plans perpendiculaires en leurs milieux aux droites joignant deux points d'une cyclide conjugués dans un système* V *touchent la quadrique* U *du théorème précédent.*

Car le plan perpendiculaire au milieu de la droite cd, qui joint deux points de S_V conjugués dans le système U, touche la quadrique V; par suite, en vertu de la réciprocité signalée plus haut, le plan perpendiculaire au milieu de la droite ab, qui joint deux points de S conjugués dans le système V, touche la quadrique U.

Remarque I. — Soit g_1 un pôle principal de la cyclide S; toute droite issue de ce point coupe S en quatre points a, b, c, d, conjugués deux à deux dans le système défini par le cône inscrit V_1, de sommet g_1 (§ **10**); par conséquent, les plans perpendiculaires aux segments ab et cd en leurs milieux touchent une quadrique telle que U. D'un autre côté, nous savons que l'enveloppe de ces plans est la déférente D_1; par suite :

Les cinq déférentes d'une cyclide ont mêmes focales; ces focales sont les focales singulières de la cyclide (¹).

(¹) Moutard, *Soc. phil.*, p. 67, 14 mai 1864.

Le théorème XXXI peut s'énoncer ainsi :

Les plans perpendiculaires en leurs milieux aux segments déterminés par deux points d'une cyclides conjugués dans un même système touchent une quadrique homofocale aux déférentes de la cyclide.

Remarque II. — Il existe, entre les quadriques U et V, la relation suivante de position et de dimensions :

Les quadriques U *et* V *ont mêmes directions principales, et les longueurs de leurs axes parallèles sont inversement proportionnelles.*

Soit, en effet, δ une tangente de V, coupant S aux points a, b, c, d; on a, si g est le point de contact de la droite ab et de V,

$$ga \,.\, gb = gc \,.\, gd,$$

ce qu'on peut écrire

$$ga(ga + ab) = (ga + ac)(ga + ad)$$

ou

$$ga \,.\, ab = ga(ac + ad) + ac \,.\, ad.$$

Si δ devient une génératrice du cône asymptote de V, le point g est à l'infini, et la relation précédente devient

$$ab = ac + ad.$$

En d'autres termes, les segments ab et cd ont même milieu.

Le plan perpendiculaire à ces segments en leur milieu touche U; d'un autre côté (théorème II), il passe par le centre de S, c'est-à-dire par le centre de U (théorème XXXI); il touche donc le cône asymptote de cette quadrique. En d'autres termes, *les cônes asymptotes des quadriques* U *et* V *sont supplémentaires, ce qui démontre le théorème.* C. Q. F. D.

17. — Intersection d'un cercle et d'une cyclide.

Le théorème XXXI permet de déterminer simplement le quatrième point d'intersection d d'une cyclide S et d'un cercle, passant par trois points donnés de cette surface a, b et c.

En effet, les points a et b, c et d sont conjugués dans un même système (théorème XVII) que nous appellerons V; et, par suite, les plans perpendiculaires aux segments ab et cd en leurs milieux touchent la quadrique U qui correspond à la quadrique V. Ces deux plans sont donc les plans menés par l'axe du cercle considéré, tangentiellement à U.

Or U est une quadrique homofocale aux déférentes de S, et l'on sait que les deux plans menés par une droite quelconque tangentiellement à l'une des quadriques d'un système homofocal, sont également inclinés sur deux plans fixes, passant par la droite.

Si donc nous appelons *cordes communes* à une cyclide et à un cercle deux droites joignant deux à deux les quatre points communs, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème XXXII. — *Soient menés par l'axe d'un cercle deux plans normaux aux cordes communes à ce cercle et à une cyclide, et deux plans tangents à une quelconque des quadriques homofocales aux déférentes de cette surface : les deux couples de plans ont mêmes plans bissecteurs.*

En particulier, on pourra considérer les deux plans menés par l'axe du cercle tangentiellement à l'une des focales singulières de la cyclide.

De là résultent, quand on connaît les points a, b, c, la détermination du plan mené par l'axe du cercle normalement à la droite cd et, par suite, la détermination de la droite cd et du point d.

Remarque. — Soit, dans le plan tangent à une cyclide en un point a, un cercle de rayon infiniment petit ayant a pour centre; les asymptotes de l'indicatrice au point a sont à la limite des cordes communes au cercle et à la surface; donc :

Les plans menés par la normale en un point d'une cyclide tangentiellement à l'une des déférentes sont également inclinés sur les plans des sections principales de la cyclide au point considéré.

18. — Intersection d'une sphère et d'une cyclide.

Par la méthode du paragraphe précédent, on peut, étant donnés quatre points a, b, c, d d'une cyclique située sur une cyclide, déterminer simplement autant de points qu'on veut de cette courbe.

En effet, il suffit, par trois des points donnés a, b, c, de faire passer un cercle et de déterminer le quatrième point e, où ce cercle coupe la cyclide; ce point est évidemment sur la cyclique. De même, en considérant le cercle des points a, b, d, on obtient un nouveau point f de la cyclique, et ainsi de suite, en combinant trois à trois les points déjà connus.

Si les points a, b, c, d sont dans un plan, la cyclique est plane; si, de plus, ils sont sur un même cercle, ils doivent satisfaire à la condition posée par le théorème XXXII et, en ce cas, il faut évidemment connaître un autre point de la cyclique pour la déterminer.

La construction précédente ne suppose connues que les focales singulières de la cyclide.

Si l'on se donne les focales singulières et cinq points a, b, c, d, e d'une cyclide S, cette dernière est déterminée : on peut en effet construire point par point la cyclique déterminée par les points a, b, c, d; de même, celle déterminée par les points a, b, c, e; et ainsi de suite en combinant quatre à quatre les points donnés et ceux que l'on en a déduits. Le lieu des cycliques ainsi obtenues est la cyclide S.

De ce qui précède résulte immédiatement la proposition suivante :

Deux cyclides ayant mêmes focales singulières se coupent suivant une cyclique.

Soient une sphère Σ, de centre a, coupant une cyclide S suivant une cyclique σ, et H un des quatre cônes passant par cette courbe.

H est circonscrit à une quadrique V, inscrite à S; et toute génératrice

de ce cône coupe σ en deux points conjugués dans le système V (§ 6, *Remarque*).

Si donc on mène du centre a de Σ des plans perpendiculaires aux génératrices de H, ces plans toucheront la quadrique U, qui correspond à la quadrique V. En d'autres termes :

Le cône H' de sommet a, supplémentaire du cône H, est circonscrit à la quadrique U.

Les deux quadriques U et V sont donc telles qu'à tout cône circonscrit à l'une correspond un cône circonscrit à l'autre et supplémentaire du premier. Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que leurs cônes asymptotes sont supplémentaires ; nous y reviendrons plus loin.

Le cône H' étant circonscrit à une quadrique U, ayant mêmes focales que les déférentes de S, a pour axes, quelle que soit U, les normales menées en a aux trois quadriques du système homofocal considéré qui passent par ce point. De même, il a pour focales les six génératrices que l'on peut tracer sur ces trois quadriques par le point a. Cela résulte des théorèmes connus sur les quadriques homofocales.

Or les axes des cônes H et H' sont parallèles et les sections circulaires de l'un sont perpendiculaires aux focales de l'autre ; on peut donc énoncer les résultats suivants :

THÉORÈME. — *Les plans principaux et les sections circulaires de toutes les quadriques qui passent par une cyclique située sur une cyclide sont normaux aux axes et aux focales du cône qui a pour sommet le centre de la courbe et qui est circonscrit à l'une quelconque des déférentes.*

Corollaire. — Si le point a est sur une des focales des déférentes de S, les cônes H', circonscrits de ce point aux déférentes, sont de révolution ; il en est donc de même des cônes H et la cyclique σ, étant sur un cône de révolution, est une *cartésienne ;* donc :

Toute sphère ayant son centre sur une des focales singulières d'une cyclide coupe cette surface suivant une cartésienne ([1]).

La proposition réciproque est évidemment vraie.

([1]) Ce théorème est dû à M. Darboux, *loc. cit.*, p. 170.

Une propriété géométrique des quadriques correspondantes U et V nous permettra d'étudier de plus près l'intersection d'une cyclide et d'une sphère.

Cette propriété, déjà énoncée en partie, est la suivante :

Si deux quadriques U *et* V, *de centres* o *et* o', *ont leurs cônes asymptotes supplémentaires, à tout cône* H *circonscrit à* V *correspondront deux cônes* H'_1 *et* H'_2 *circonscrits à* U *et supplémentaires du premier; leurs sommets sont symétriques par rapport au centre de* U.

Si l est le sommet du cône H, a_1 et a_2 les sommets des cônes H'_1 et H'_2, la droite $a_1\,a_2$ est perpendiculaire au plan polaire de l par rapport à V; de plus, en désignant par

δ la distance $o'l$,

δ_1 la distance oa_1,

d le demi-diamètre de V suivant $o'l$,

d_1 le demi-diamètre de U suivant oa_1.

On aura

$$\text{(R)} \qquad \frac{d}{\delta} + \frac{d_1}{\delta_1} = 1.$$

Les points a_1 et a_2 sont donc déterminés par ces propriétés, quand le point l est donné.

Cette proposition se démontre aisément par la géométrie ou par le calcul : on s'appuie sur les propriétés élémentaires des quadriques.

Cela posé, remarquons que le cône H circonscrit à V coupe S suivant deux cycliques du groupe V, et que les cônes supplémentaires de H qui ont pour sommets les centres de ces cycliques sont circonscrits à U. Il résulte de la proposition énoncée plus haut que ces deux centres sont précisément les points a_1 et a_2.

Si, au lieu du cône H, on considère le cône K, circonscrit à V et ayant pour sommet le symétrique m, de l, par rapport au centre de V, il est évident que les centres des deux cycliques suivant lesquelles ce cône coupe S sont encore les points a_1 et a_2.

Inversement :

Étant donné un point a_1, on peut de ce point comme centre décrire deux sphères coupant S *suivant des cycliques du groupe* V.

Les sommets des cônes contenant ces cycliques sont les points l et m; pour les déterminer, on remarque que la droite lm est perpendiculaire au plan polaire de a_1 par rapport à U, et que la relation (R) donne la distance des points l et m au centre o' de V.

On peut déterminer aisément les deux sphères du groupe V, ayant le point a_1 pour centre.

En effet, le cône H de sommet l, circonscrit à V, coupe S suivant deux cycliques, situées sur des sphères Σ_1 et Σ_2 ayant respectivement pour centre les points a_1 et a_2. On sait (théorème XIII) que ces deux sphères et la sphère C qui contient la cyclique de contact de V et de S ont un cercle commun et que le plan de ce cercle est le plan de contact de H et de V, c'est-à-dire le plan polaire Π de l par rapport à V.

Le point a_1 étant donné et le point l déterminé comme on l'a dit, la sphère Σ_1 sera la sphère de centre a_1 passant par le cercle commun au plan Π et à la sphère C.

Comme application de cette théorie générale nous allons étudier les cycliques situées à l'intersection de S et des cylindres circonscrits à une quadrique V donnée.

Nous appellerons ces cycliques *cycliques symétriques du groupe* V. On voit en effet, sans difficulté, que toute cyclique située sur un cylindre du second ordre est symétrique par rapport au plan mené par le centre de la courbe normalement à l'axe du cylindre, et réciproquement.

19. — Des cycliques symétriques situées sur une cyclide.

Soit H un cylindre circonscrit à V, coupant S suivant deux cycliques σ_1 et σ_2 situées sur des sphères Σ_1 et Σ_2 de centres a_1 et a_2.

Le cône supplémentaire de ce cylindre est un plan perpendiculaire aux génératrices; les points a_1 et a_2 sont donc, d'après ce qui précède, les

points de contact avec U des deux plans tangents normaux aux génératrices de H.

Ainsi :

Les centres des cycliques symétriques du groupe V *sont sur la quadrique* U.

Les génératrices du cylindre qui passe par une de ces cycliques sont normales au plan mené au centre de la courbe tangentiellement à la quadrique U.

Cela posé, soit C la sphère ayant pour centre le centre de U (ou de S) qui contient la cyclique de contact des surfaces S et V : le plan du cercle commun à cette sphère et à Σ_1 est celui de la conique de contact du cylindre H et de la quadrique V (théorème XIII); il passe donc par le centre o' de cette quadrique.

En d'autres termes, le point o' a même puissance par rapport aux sphères C et Σ_1; et la sphère Σ_1 coupe à angle droit la sphère C' de centre o' orthogonale à C. Ainsi :

Les sphères qui contiennent les cycliques symétriques du groupe V *coupent à angle droit une sphère fixe* C', *concentrique à* V.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies, et l'on démontre sans difficulté que :

Toute sphère ayant son centre sur U, *et orthogonale à* C', *coupe* S *suivant une cyclique symétrique du groupe* V.

En particulier, les sphères de rayon nul, ayant leur centre à l'intersection de U et de C', coupent S suivant des cycliques (symétriques) du groupe V; et, par suite (théorème XX), la courbe sphérique commune à U et à C' est située sur la cyclide S_V, homofocale à S, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe V.

Or on sait que cette cyclide (§ 16) touche U suivant une cyclique, et par conséquent la sphère C' est précisément celle qui renferme la cyclique de contact de S_V et de U. Comme elle est orthogonale à C, on a ce théorème :

Théorème. — *Soient deux cyclides homofocales : chacune d'entre elles touche suivant une courbe sphérique une quadrique ayant pour focales les focales singulières de l'autre, et les sphères qui contiennent les deux courbes de contact sont orthogonales.*

De plus, les résultats précédents peuvent s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Toute sphère ayant son centre a_1 sur la quadrique* U *et orthogonale à la sphère qui contient la cyclique de contact de cette quadrique et de la cyclide* S_V *coupe* S *suivant une cyclique du groupe* V, *symétrique par rapport au plan qui touche* U *au point* a_1.

Plus simplement :

Les sphères qui coupent une cyclide suivant des cycliques symétriques appartenant à un même groupe sont bitangentes à une cyclide fixe.

Cette cyclide a U pour déférente et C′ pour sphère directrice.

De ce qui précède résulte la proposition suivante :

D'un point donné a_1 *comme centre on peut décrire trois sphères coupant une cyclide suivant des courbes symétriques.*

Car par a_1 passent trois quadriques telles que U homofocales aux déférentes de S.

Les plans de symétrie de ces trois courbes sont rectangulaires deux à deux.

Car les trois quadriques homofocales aux déférentes de S se coupent orthogonalement en a_1 (1).

Remarque. — Soit une sphère de centre a_1 coupant S suivant une courbe symétrique du groupe V : cette courbe rencontrera son plan de symétrie en quatre points et lui sera normale en ces points.

En d'autres termes, le plan de symétrie est normal à la cyclide S en quatre points, situés sur un cercle de centre a_1.

De même, un plan quelconque est normal à une cyclide en quatre points,

(1) Cf. Darboux, *loc. cit.*, p. 168.

car il existe une (et une seule) quadrique U, homofocale aux déférentes de S, et touchant ce plan en un point.

THÉORÈME. — *Tout plan est normal à une cyclide en quatre points situés sur un cercle, dont le centre est le point de contact du plan avec une quadrique homofocale aux déférentes de la cyclide.*

La sphère qui a ce cercle pour méridien reste orthogonale à une sphère fixe quand le plan considéré reste tangent à une quadrique homofocale aux déférentes.

Les quatre points où un plan est normal à S seront sur une droite si ce plan est tangent au cône asymptote d'une quelconque des quadriques homofocales aux déférentes de S, c'est-à-dire si le plan passe par le centre des déférentes. Donc :

THÉORÈME. — *Tout plan passant par le centre d'une cyclide est normal à cette surface en quatre points situés sur une droite.*

Ce théorème sera complété plus tard.

Parmi les cycliques à plan de symétrie, il faut distinguer les *coniques sphériques*.

Une cyclique symétrique devient une conique sphérique quandl'axe du cylindre qui la contient passe par son centre.

Soit une telle courbe, appartenant au groupe V, c'est-à-dire située sur un cylindre H circonscrit à V. On sait que son centre a_1 est sur la quadrique U et que les génératrices du cylindre H sont normales au plan P_1, qui touche U en a_1. D'un autre côté, le cylindre H étant circonscrit à V, son axe passe par le centre o' de V : pour qu'il passe par a_1, il faut et il suffit que la droite $o'a_1$ soit perpendiculaire à P_1, c'est-à-dire normale à U au point a_1. Donc :

Les six cycliques symétriques du groupe V *qui ont pour centres les pieds des normales abaissées du centre de la quadrique* V *sur la quadrique* U *sont des coniques sphériques.*

Nous compléterons ce résultat dans la seconde partie de ce travail [1].

---

[1] *Voir*, à ce sujet, DARBOUX, *loc. cit.*, p. 168 et 169, où est énoncé un résultat analogue.

20. — Nouvelles propriétés des sphères d'un même groupe.

La théorie du § 18 peut recevoir une autre application, d'un autre ordre qui nous conduira à des propriétés nouvelles des sphères d'un même groupe, et en particulier des sphères qui renferment les conjugués, dans un système donné, des différents points d'une cyclide.

V étant une quadrique inscrite à S, l et m deux points symétriques par rapport au centre o' de V, nous avons vu que les cônes H et K, de sommets l et m, circonscrits à V, coupent S suivant quatre cycliques ayant deux à deux mêmes centres; ces deux centres, a_1 et a_2, symétriques par rapport au centre o de U, se déduisent de l et m par la relation indiquée : ce sont les sommets de deux cônes, supplémentaires de H et K, et circonscrits à une quadrique U, dont le cône asymptote est supplémentaire du cône asymptote de V.

On démontrerait sans difficulté la proposition suivante :

Si le point l décrit un plan, les points a_1 et a_2 décrivent une quadrique circonscrite à U *suivant une conique centrale, c'est-à-dire dont le plan passe par le centre o de* U. Par suite :

1. *Si les points* $\left\{\begin{matrix} l, m \\ a_1, a_2 \end{matrix}\right.$ *décrivent une quadrique circonscrite à* $\left\{\begin{matrix} \mathrm{V} \\ \mathrm{U} \end{matrix}\right.$ *suivant une conique centrale, les points* $\left\{\begin{matrix} a_1, a_2 \\ l, m \end{matrix}\right.$ *décrivent deux plans symétriques par rapport au centre de* $\left\{\begin{matrix} \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \end{matrix}\right.$, et réciproquement.

Nous avons vu que les points a_1 et a_2 sont sur la droite menée par le centre o de U normalement au plan polaire de l par rapport à V [1]. Il en résulte immédiatement que :

2. *Si les points* $\left\{\begin{matrix} l, m \\ a_1, a_2 \end{matrix}\right.$ *décrivent un plan* $\left\{\begin{matrix} \mathrm{P} \\ \Pi \end{matrix}\right.$ *passant par le centre de*

---

[1] Cette proposition, que nous n'avons fait qu'énoncer au § 18, comme une conséquence des propriétés générales des surfaces du second ordre, se déduit immédiatement du théorème XIII, car, d'après ce théorème, les deux sphères de centres a_1 et a_2, qui contiennent les courbes suivant lesquelles le cône H coupe S, ont un cercle commun dans le plan polaire de l par rapport à V.

$\left\{\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}\right.$, *les points* $\left\{\begin{matrix} a_1, a_2 \\ l, m \end{matrix}\right.$ *décrivent un plan passant par le centre de* U : ce plan est normal au diamètre conjugué de $\left\{\begin{matrix} P \\ \Pi \end{matrix}\right.$ dans la quadrique $\left\{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}\right.$.

3. *Si* $\left\{\begin{matrix} l, m \\ a_1, a_2 \end{matrix}\right.$ *décrivent deux droites symétriques par rapport au centre de* $\left\{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}\right.$, *les points* $\left\{\begin{matrix} a_1, a_2 \\ l, m \end{matrix}\right.$ *décrivent une conique concentrique et bitangente à* $\left\{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}\right.$; *et réciproquement.*

Si $\left\{\begin{matrix} l, m \\ a_1, a_2 \end{matrix}\right.$ *décrivent une droite passant par le centre de* $\left\{\begin{matrix} V \\ U \end{matrix}\right.$, *les points* $\left\{\begin{matrix} a_1, a_2 \\ l, m \end{matrix}\right.$ *décrivent une droite passant par le centre de* $\left\{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}\right.$.

Toutes ces propositions donnent des propriétés des sphères ou des cycliques d'un même groupe ; ainsi :

4. *Les cycliques appartenant à un groupe* V *par rapport à une cyclide* S, *et dont les centres sont dans un même plan, sont sur des cônes du second ordre circonscrits à la quadrique* V *et dont les sommets restent sur une quadrique, inscrite à* V *suivant une conique centrale.*

Les cônes circonscrits à V *et dont les sommets sont dans un même plan coupent* S *suivant des cycliques dont les centres restent sur une quadrique, inscrite à* U *suivant une conique centrale*, *etc.*

Le cas où le point l décrit une droite δ est particulièrement intéressant : dans ce cas, le cône H, de sommet l, circonscrit à V, touche V suivant un plan P, qui passe par la conjuguée δ' de S par rapport à V ; d'un autre côté, les deux sphères qui contiennent les cycliques suivant lesquelles ce cône coupe S passent (théorème XIII) par le cercle commun au plan P et à la sphère C qui renferme la cyclique de contact de V et de S. Il en résulte que ces sphères passent par les deux points fixes communs à C et à δ'. Donc :

5. *Les cônes circonscrits à* V, *et dont les sommets décrivent une droite, coupent* S *suivant des cycliques situées sur des sphères passant par deux*

points fixes; les centres de ces sphères sont sur une conique concentrique et bitangente à U.

On obtient des résultats intéressants en supposant que le point l soit situé sur la cyclide S; en ce cas, le cône de sommet l circonscrit à V coupe S suivant deux cycliques dont l'une est le lieu des points conjugués de l dans le système V, et par suite est située sur une sphère Ω, tangente à S au point l.

D'après ce qui précède, on pourra donc énoncer les théorèmes suivants :

6. *Si quatre points d'une cyclide sont en ligne droite, les quatre sphères qui renferment les conjugués de ces points dans un même système passent par deux mêmes points, et leurs centres sont sur une conique concentrique à la cyclide.*

7. *Les centres des sphères qui renferment les conjugués dans un même système des points d'une courbe plane, située sur une cyclide, sont sur une quadrique concentrique à la cyclide.*

8. *Si quatre points d'une cyclide sont sur une droite passant par le centre d'une quadrique* V, *inscrite à cette surface, les centres des quatre sphères qui contiennent les conjugués de ces points dans le système* V *sont sur une droite passant par le centre de la cyclide.*

En d'autres termes, les normales menées à la cyclide aux points considérés rencontrent une même droite, issue du centre de la surface, et les quatre points de rencontre sont les centres des sphères qui renferment les conjugués des quatre points dans le système V.

Il en résulte évidemment que *les normales menées à une cyclide en quatre points, situés sur une droite joignant les centres de deux quadriques inscrites à cette surface, sont dans un même plan passant par le centre de la cyclide.*

Ce résultat sera retrouvé et développé dans la deuxième partie.

Dans le cas particulier où la quadrique V est un cône de sommet g, la sphère qui renferme les conjugués dans le système V d'un point l de S

(et qui touche S en ce point), passe par un second point, l', de la droite gl, tel que l'on ait $gl.gl' = K^2$ (p. 157, note). Cette sphère touche donc S aux points l et l' (§ 10). Donc :

9. *Si quatre sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide, ont quatre de leurs points de contact avec cette surface situés sur une même droite, elles ont deux points communs, et le plan de leurs centres passe par le centre de la cyclide.*

Un autre cas intéressant est celui où le point l se meut sur une ligne de courbure γ_V, de S ; une des sphères de courbure en l renferme alors les conjugués de ce point dans le système V (§ 14). Donc :

10. *Soient deux cyclides homofocales se coupant suivant une ligne de courbure ; menons par le centre de la première* (S_V) *un plan quelconque, rencontrant la ligne de courbure en huit points, et considérons les centres de courbure principaux de la deuxième cyclide* (S) *en ces points : huit de ces centres sont dans un même plan, passant par le centre de* (S).

Ces huit centres de courbure sont à l'intersection des normales à S aux points considérés et des normales menées aux points infiniment voisins dans une direction perpendiculaire à la ligne de courbure. De même :

11. *Si quatre points d'une ligne de courbure d'une cyclide sont sur une droite, quatre des centres de courbure principaux en ces points sont sur une conique concentrique à la cyclide, etc.*

On peut déduire également de cette théorie une construction simple des rayons de courbure des sections planes d'une cyclide.

Toute sphère, Ω, tangente à une cyclide S en un point l, coupe S suivant une cyclique, ω, ayant un point double en l. Soient lt, lt' les tangentes à ω en ce point : les sections faites dans la cyclide par les plans normaux passant par lt ou lt' ont évidemment pour rayon de courbure en l le rayon de la sphère Ω.

D'un autre côté, la cyclique ω est (§ 7) le lieu des conjugués du point

l dans un système V; et par suite le point l et le point infiniment voisin de l sur la droite lt sont conjugués dans ce système, ainsi que les deux points m et n, où la droite lt coupe de nouveau la cyclide (théorème XVIII).

Cela posé, la sphère qui renferme les conjugués de l dans le système V est la sphère Ω; celle qui renferme les conjugués de m dans ce système touche S en m et passe par n; soit b_1 son centre. Soient de même c_1 le centre de la sphère qui contient les conjugués de n dans le système V, et a_1 le centre de la sphère Ω. D'après le théorème **6**, les points a_1, b_1, c_1, o sont dans un même plan. Donc :

12. *Soient lt une droite quelconque touchant une cyclide* S, *de centre o, en un point l et la coupant en outre aux points m et n; b_1 et c_1 les centres des deux sphères qui, passant par m et n, touchent respectivement* S *en ces deux points. Le centre de courbure de la section normale faite dans* S *par un plan mené par la droite lt est à l'intersection de la normale en l à la cyclide et du plan des trois points o, b_1 c_1,* (¹).

Nous complèterons plus tard quelques-uns des théorèmes du paragraphe actuel.

21. — Des cyclides inscrites a une cyclide.

Nous dirons que deux cyclides S et S_1 sont inscrites l'une et l'autre si elles se touchent suivant une cyclique σ.

Soient deux cycliques σ_1 et σ_2 situées sur S et sur des sphères Σ_1, Σ_2; toutes les surfaces du quatrième degré qui passent par les points communs à S et à la cyclide formée par les sphères Σ_1 et Σ_2 sont des cyclides renfermant les courbes σ_1 et σ_2; si les sphères Σ_1 et Σ_2 se confondent, les surfaces du faisceau considéré deviennent des cyclides inscrites à S. Il y a

(¹) M. Laguerre a donné (*Soc. phil.*, 1871, p 245) une construction du même genre, mais différente de celle indiquée.

donc un nombre simplement infini de cyclides inscrites à S le long d'une cyclique donnée.

THÉORÈME XXXII. — *Les sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide* S_1 *inscrite à une cyclide* S, *appartiennent à un même groupe par rapport à cette dernière surface.*

Soient σ la cyclique de contact de S et de S_1, et Σ la sphère qui la contient; considérons une sphère Σ_1, bitangente à la cyclide S_1 qu'elle coupe suivant les cercles α_1 et β_1.

Le cercle α_1 coupe Σ en deux points, situés sur σ, et touche S en ces deux points; le théorème sera démontré, en vertu du théorème XXII, si nous prouvons que les cercles, tels que α_1 et β_1, situés sur S_1 et bitangents à S, appartiennent à un même groupe; c'est-à-dire si leurs deux points de contact avec S sont conjugués sur cette surface dans un même système.

Soient a_1 et a'_1 les points où le cercle α_1 coupe Σ, b_1 et b'_1 ceux où le cercle β_1 coupe cette même sphère : les cercles α_1 et β_1 étant sur la sphère Σ_1, les points a_1, a'_1, b_1, b'_1 sont sur le cercle commun à Σ et à Σ_1.

En d'autres termes, si nous appelons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les cercles situés sur S_1 et appartenant à un même système (§ 10); $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ les cercles situés sur S_1 de l'autre système, on peut dire, puisqu'un cercle α et un cercle β sont toujours sur une sphère (§ 10), que les deux points de contact avec S d'un cercle α et les deux points de contact d'un cercle β sont sur un cercle.

Il en résulte immédiatement (théorème XVII) que les deux points de contact avec S d'un cercle α ou d'un cercle β sont conjugués dans un même système. C. Q. F. D.

Le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Les cercles d'une même série situés sur une cyclide S_1, *inscrite à une cyclide* S, *touchent cette dernière en deux points; la droite qui joint ces points reste tangente à une quadrique fixe inscrite à* S, *que touchent également les plans des cercles considérés.*

En particulier, les sphères de rayon nul d'une même série bitangente à

S_1 appartiennent à un même groupe par rapport à S; leurs centres, dont le lieu est une focale de S_1, sont donc sur une cyclide homofocale à S; par suite (théorème XX) :

Si deux cyclides se touchent suivant une courbe sphérique, les focales de l'une sont sur des cyclides homofocales à l'autre (¹).

On peut ainsi, en se reportant aux résultats du § 14, énoncer les propositions suivantes :

Les sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide S_1, *inscrite à une cyclide* S, *coupent cette dernière suivant des courbes qui ont une de leurs focales sur une même cyclide, homofocale à* S. *Cette cyclide contient la focale de* S_1, *située sur la sphère directrice qui coupe à angle droit les sphères bitangentes considérées.*

Les cercles α, β, ... d'une même série situés sur S_1 sont bitangents à S et appartiennent, comme on l'a vu, à un même groupe; si donc on fait passer par un quelconque de ces cercles une sphère tangente à S, le point de contact décrit une ligne de courbure de cette surface (théorème XXVIII); en d'autres termes :

Théorème. — *Si deux cyclides se touchent suivant une courbe sphériques, les sphères d'une même série doublement tangente à l'une d'elles et simplement tangentes à l'autre touchent cette dernière suivant une ligne de courbure* (²).

Considérons une quadrique quelconque V_1, inscrite à S_1 suivant une cyclique située sur une sphère C_1 : cette courbe coupe la sphère Σ en quatre points a, b, c, d, situés sur le cercle commun à C_1 et à Σ et qui sont évidemment sur la cyclique de contact, σ, de S_1 et de S.

Il en résulte qu'en ces quatre points les surfaces S_1, V_1 et S se touchent.

Dès lors (démonstration du théorème XIII) la quadrique V_1 coupe S suivant deux cycliques, et touche une quadrique V, inscrite à S, le

(¹) M. Darboux a démontré cette proposition par le calcul, *loc. cit.*, p. 331.

(²) *Ibid.*

long d'une conique dont le plan est celui des points a, b, c, d (théorème XIII).

D'ailleurs (théorème XIII), le cercle passant par ces quatre points est sur la sphère C qui contient la cyclique de contact de V et de S. Ainsi :

Théorème XXXIII. — *Si deux cyclides* S *et* S_1 *se touchent suivant une courbe sphérique, toute quadrique* V_1 *inscrite à* S_1 *touche suivant une conique une quadrique* V *inscrite à* S.

De plus :

La sphère Σ *qui contient la cyclique de contact de* S_1 *et de* S, *les sphères* C *et* C_1 *qui contiennent respectivement les cycliques de contact de* S_1 *et de* V, *de* S_1 *et de* V_1, *ont un cercle commun; le plan de ce cercle coïncide avec le plan de la conique de contact de* V *et de* V_1.

D'après cela, les centres des sphères Σ, C et C_1 sont en ligne droite; or les centres de C et de C_1 sont respectivement les centres de S et de S_1; par suite :

Théorème. — *Le lieu des centres des cyclides inscrites à une cyclide le long d'une cyclique donnée est la droite qui joint le centre de la cyclide au centre de la cyclique.*

D'après ce qui a été dit plus haut, les cyclides inscrites à une cyclide S sont en nombre cinq fois infini ; celles de ces surfaces qui sont doublement tangentes à une sphère donnée Σ' sont encore en nombre triplement infini ; elles présentent une particularité intéressante.

La sphère Σ' appartient, par rapport à S, à quatre groupes V_1, V_2, V_3, V_4, puisqu'on peut faire passer quatre cônes du second ordre par la courbe commune à cette sphère et à la cyclide (théorème XIII); toute cyclide S_1, inscrite à S et bitangente à Σ', admettra (théorème XXXII) une série de sphères bitangentes, appartenant à l'un des groupes V_1, V_2, V_3, V_4; celles de ces sphères dont le rayon est nul seront par suite sur une des cyclides S_{V_1}, S_{V_2}, S_{V_3}, S_{V_4}, homofocales à S. On pourra donc énoncer les résultats suivants :

THÉORÈME XXXIV. — *Les cyclides inscrites à une cyclide donnée* S, *et bitangentes à une sphère donnée, se partagent en quatre classes; les cyclides d'une même classe ont une de leurs focales sur une même cyclide homofocale à* S, *qui contient également une des focales de la courbe commune à* S *et à la sphère considérée.*

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces applications; nous nous contenterons d'énoncer un théorème relatif au sujet qui nous occupe.

Les cercles bitangents à une cyclide S_1, *inscrite à une cyclide* S, *et appartenant à un même groupe, coupent cette dernière surface en quatre points qui sont conjugués deux à deux dans un même système.*

En s'appuyant sur ce résultat et en suivant la même marche que dans la démonstration du théorème (§ **14**), on complète aisément une proposition énoncée plus haut et due à M. Darboux.

THÉORÈME. — *Si deux cyclides se touchent suivant une courbe sphérique, les sphères d'une même série doublement tangentes à l'une d'elles en des points a et b, et simplement tangentes à l'autre en un point m, touchent cette dernière le long d'une ligne de courbure.*

Cette ligne coupe à angle droit au point m le cercle qui passe par les points a, b, m.

Remarque. — La démonstration du théorème XXXII subsiste sans modification quand la cyclide inscrite à S est une quadrique V; par sphères d'une même série bitangentes à V on doit entendre les sphères dont les deux points de contact sont sur une droite parallèle à un même axe de la quadrique.

Cela posé, appelons p, q, r, s les points où la quadrique V rencontre le cercle de l'infini; toute sphère bitangente de la série considérée coupe V suivant deux cercles α et β dont les plans passent l'un par la droite pq (par exemple), l'autre par la droite rs.

Les points p, q, r, s sont d'ailleurs (théorème X) les points de rebroussement à l'infini de la cyclide S.

Or les plans des cercles α et β, c'est-à-dire des plans quelconques passant par les droites pq et rs, touchent une quadrique V′ inscrite à S

(théorème XXXII, 2e énoncé) : on en conclut que V′ passe par les droites *pq* et *rs* et, par suite, est un des trois *paraboloïdes* inscrits à S (*remarque* § 5). Donc :

Théorème. — *Les cercles situés sur une quadrique* V *inscrite à une cyclide* S *et dont les plans sont parallèles à un même axe* δ, *de* V, *touchent* S *en deux points : la droite qui joint ces points touche un paraboloïde* V′ *inscrit à* S, *et dont l'axe est parallèle à* δ.

Les sphères passant par ces cercles appartiennent par rapport à S au groupe V′; celles qui sont de rayon nul ont leurs centres sur une focale de V dont le plan est perpendiculaire à δ.

D'ailleurs on sait (théorème XX, et § 9, *Remarque*) que le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe V′ est une cyclide du troisième ordre.

Donc :

Théorème. — *Dans toute quadrique inscrite à une cyclide* S, *la focale dont le plan est parallèle à un plan principal donné est sur une cyclide du troisième ordre, homofocale à* S.

Plus simplement on dira que :

Les trois focales des quadriques inscrites dans une cyclide S *sont chacune sur une des trois cyclides du troisième ordre, homofocales à la proposée* (1).

Le lieu reste évidemment le même si, au lieu de S, on considère une des cyclides homofocales.

Les focales d'une quadrique inscrite à S sont les focales singulières d'une cyclide homofocale ; donc :

Les focales singulières d'un système de cyclides homofocales sont sur les trois cyclides du troisième ordre du système.

Les quadriques homofocales à une quadrique V, *inscrite à une cyclide* S, *sont inscrites aux cyclides homofocales à* S (2).

---

(1) Ce théorème est de M. Darboux, *loc. cit.*, p. 334.

(2) *Ibid.*

22. — De la transformation par rayons vecteurs réciproques.

On sait qu'une inversion quelconque transforme une quadrique en une cyclide ayant un point double au pôle d'inversion.

Il en résulte qu'une cyclique se transforme en une autre cyclique.

De même, toute inversion transforme une cyclide S en une autre cyclide S_1.

En effet, S étant coupée par toute sphère et tout plan suivant une cyclique, S_1 sera aussi coupée par tout plan suivant une cyclique; c'est-à-dire sera une surface du quatrième degré ayant le cercle à l'infini comme ligne double. C. Q. F. D.

Nous dirons que les cyclides S et S_1 sont inverses.

Théorème XXXV. — *Toute inversion fait correspondre à des couples de points situés sur une cyclide et conjugués dans un même système des couples de points conjugués également dans un même système sur la cyclide inverse.*

Car on obtient sur une cyclide (théorème XVII) tous les couples de points conjugués dans le même système que deux points a et b de cette surface, en faisant passer par ces points des cercles (ou droites) coupant S en de nouveaux points a' et b', a'' et b'', . . . , et en opérant de même avec les couples a', b'; a'', b'' et avec tous les nouveaux couples que l'on obtient successivement.

Comme toute inversion transforme un cercle en cercle, les couples de points de la cyclide S_1 qui correspondent aux points a, b; a', b'; . . . sont également conjugués dans un même système. C. Q. F. D.

Il en résulte que les cercles bitangents à une cyclide et appartenant à un même groupe se transforment en cercles bitangents à la cyclide inverse et faisant partie d'un même groupe.

Par suite, également, les sphères d'un même groupe se transforment en sphères d'un même groupe.

Car les sphères d'un même groupe sont celles qui passent par les cercles bitangents d'un même groupe.

On démontre aisément, par la méthode d'inversion, les théorèmes suivants :

Il existe une série de cyclides inscrites à une cyclide S *suivant une courbe sphérique et ayant un point double en un point donné a.*

Les sphères qui renferment les cycliques de contact de ces surfaces et de S *coupent orthogonalement toutes les sphères passant par le point a et par un point fixe b du plan.*

Les cercles qui passent par le point a et par deux points quelconques de la cyclide S, *conjugués dans un système donné* V, *restent tangents à une des cyclides inscrites précédentes, etc.*

Une sphère est normale à une cyclide en quatre points situés sur un cercle.

En transformant la proposition **6** du § **20**, on obtient la propriété suivante :

Si quatre points d'une cyclide sont sur un cercle, les quatre sphères qui renferment les conjugués de ces points dans un même système passent par deux mêmes points.

On déduit de là, comme au § **20**, les théorèmes suivants :

Si quatre sphères d'une même série bitangentes à une cyclide ont quatre de leurs points de contact avec cette surface situés sur un même cercle, elles ont deux points communs, et, par suite, leurs centres sont dans un même plan.

Le cercle considéré peut être situé sur la cyclide :

Les sphères qui renferment les conjugués dans un même système des points d'un cercle tracé sur une cyclide ont deux points communs.

D'un autre côté, nous savons (§ **20**, **7**) que les centres de ces sphères sont sur une quadrique, concentrique à la cyclide ; par suite :

Les centres des sphères qui renferment les conjugués dans un même

système des points d'un cercle tracé sur une cyclide sont sur une conique concentrique à la cyclide.

En particulier :

La normalie qui a pour directrice un cercle tracé sur une cyclide a une conique commune avec chacune des déférentes; les points de cette conique sont les centres de sphères bitangentes à la cyclide et ayant un de leurs points de contact sur le cercle considéré.

Sur celle des déférentes qui passe par l'axe du cercle (§ **10**), la conique se réduit à cet axe, qui est évidemment une droite double de la normalie.

De même enfin (§ **20**, **11**) :

Si quatre points d'une ligne de courbure d'une cyclide sont sur un cercle, quatre des centres de courbure principaux en ces points sont dans un même plan, etc.

Nous n'insistons pas plus longtemps sur ces applications qui ne présentent aucune difficulté.

Remarque. — Une cyclique σ située sur une sphère Σ se transforme en une cyclique plane du troisième ordre, quand le pôle d'inversion a est sur la courbe.

Car Σ devient un plan et le cône qui a le point a pour sommet et σ pour directrice est du troisième ordre.

Théorème. — *Une cyclide se transforme en une cyclide du troisième ordre quand le pôle d'inversion est sur la surface.*

En effet, toute sphère Σ, passant par ce pôle a, coupe la cyclide S suivant une cyclique σ, passant par a.

Par l'inversion, la sphère Σ se transforme en un plan, la cyclique σ en une cubique circulaire plane : en d'autres termes, la surface inverse de S est coupée par *tout* plan suivant une cubique circulaire; c'est donc une cyclide du troisième ordre.

Nous reviendrons plus tard sur l'inversion des cyclides; nous allons pour le moment appliquer les théorèmes précédents à l'étude des cyclides du troisième ordre.

CYCLIDES DU TROISIÈME DEGRÉ.

Un certain nombre des démonstrations données plus haut ne peuvent s'appliquer aux cyclides du troisième degré; il est clair, par exemple, qu'une quadrique ne peut toucher une de ces surfaces suivant une cyclique.

Nous définirons sur une cyclide T du troisième ordre les systèmes de points conjugués par le procédé du théorème XVII.

Par deux points a et b de T, on fait passer un cercle coupant T aux nouveaux points a' et b'; par a' et b' un cercle coupant T aux nouveaux points a'' et b'', et ainsi de suite; les points a et b, a' et b', a'' et b'' seront dits conjugués dans un même système.

Les points conjugués dans un système V d'un point a d'une cyclide S sont (théorème XIX) sur une cyclique ω ayant un point double en a; ce qu'on peut énoncer ainsi :

Les cercles passant par deux points de S, conjugués dans le système V, et par le point a, rencontrent en un second point la cyclique ω, et inversement.

Les cercles qui passent par a, et qui rencontrent en un second point la cyclique ω, coupent S en deux autres points conjugués dans le système V.

Transformons ce théorème par inversion, en prenant le point a pour pôle.

La cyclide S devient une cyclide T du troisième ordre; la cyclique ω une conique, car la sphère qui la contient se transforme en un plan, et le cône qui a pour sommet a et pour directrice ω est du second ordre; enfin les cercles passant par a deviennent des droites.

Donc :

Les droites qui passent par deux points d'une cyclide T *du troisième ordre, conjugués dans un même système, rencontrent en un point une conique* ω *située sur cette surface, et, réciproquement, les droites qui rencontrent* ω *coupent* T *en deux autres points, conjugués dans un même système.*

Sur la cyclide S les cycliques, telles que ω, qui renferment les conjugués

du point a dans les divers systèmes V, sont sur des sphères tangentes en a à la cyclide; ces sphères se transforment, par l'inversion de pôle a, en plans parallèles.

Donc :

Les coniques ω *sont dans des plans parallèles.*

Il est clair que :

Ces plans passent par la droite située à l'infini sur la cyclide du troisième ordre considérée.

Les coniques ω jouent, par rapport aux cyclides du troisième ordre T, le rôle des quadriques inscrites dans les cyclides générales.

En désignant par cercles bitangents d'un même groupe ω les cercles qui touchent T en deux points conjugués dans le système ω, on voit que :

Les plans des cercles bitangents à T, *et appartenant à un groupe* ω, *touchent la conique* ω.

Appelons *sphère* du groupe ω toute sphère qui coupe T suivant une cyclique située sur un cône passant par la conique ω.

On démontre, comme dans le cas général, que :

Les sphères de rayon nul, appartenant à un même groupe ω, *ont leurs centres sur une cyclide* S′, *homofocale à la cyclide du troisième ordre considérée.*

De plus, les plans tangents à S le long du cercle de l'infini touchent la conique ω; donc :

La conique ω *est une focale singulière de la cyclide* S′.

Les théorèmes sur les lignes de courbure subsistent; ainsi :

Les plans tangents à une cyclide T *du troisième ordre et à une des coniques* ω *touchent* T *suivant une ligne de courbure.*

On démontre sans difficulté les théorèmes suivants :

Les focales singulières d'une cyclide du troisième ordre sont les focales

ordinaires d'un paraboloïde, dont l'axe est perpendiculaire aux plans des coniques ω.

Les axes des cercles bitangents à une cyclide T *du troisième ordre, et appartenant à un même groupe* ω, *touchent un paraboloïde ayant pour focales les focales singulières de* T.

Les plans perpendiculaires au milieu des segments déterminés par deux points d'une cyclide du troisième ordre conjugués dans un même système ω *touchent le paraboloïde précédent.*

Si l'on rapproche ces théorèmes de diverses propositions de la théorie générale, on arrive sans difficulté au résultat suivant :

Les normales menées à une cyclide S *aux points de son intersection avec une cyclide homofocale* T *du troisième ordre rencontrent une des focales de* S : *cette focale est située sur* T.

Remarque. — *Une cyclide du troisième ordre peut être considérée comme une cyclide ayant son centre à l'infini; inversement, toute cyclide ayant son centre à l'infini est du troisième ordre.*

En effet : 1° la cyclide S′, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un groupe V, par rapport à une cyclide S, a pour centre le centre de la quadrique V (§ 15). Si V est un paraboloïde V′ touchant le plan de l'infini en un point z, la cyclide S′ est (*Remarque I*, § 9) une cyclide du troisième ordre T′, passant par la polaire du point z par rapport au cercle de l'infini (§ 9, *Remarque II*).

On peut donc dire que la cyclide T′ a pour centre le point z, qui est, par rapport au cercle de l'infini, le pôle de la droite à l'infini sur T′.

2° Soit une cyclide S′, ayant pour centre un point z du plan de l'infini; considérons une cyclide quelconque S, homofocale à S′; on sait que S′ est le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe V, par rapport à S, et que la quadrique V a pour centre le centre de S′. Cette quadrique est donc un paraboloïde et, par suite, S′ est du troisième ordre (§ 9, *Remarque I*).

SECONDE PARTIE.

23. — De la cubique principale.

Dans la première Partie de ce travail, nous avons principalement étudié la théorie des systèmes de points conjugués sur une cyclide, et nous y avons rattaché celle des lignes de courbure, des cyclides homofocales, ou inscrites, etc.

Nous allons exposer maintenant les propriétés d'une courbe, dont l'étude est intimement liée à celle d'un système de cyclides homofocales et à celle des sections planes de ces surfaces : la courbe en question est le lieu des centres des quadriques inscrites dans une cyclide.

Théorème XXXVI. — *Les quadriques inscrites à une cyclide* S *sont homothétiques et concentriques aux quadriques qui passent par une cyclique quelconque* σ, *située sur* S *et ayant même centre que cette surface.*

En effet, la cyclique σ et la quadrique V passent par les quatre points de rebroussement à l'infini de S (théorèmes IX et XI); si donc on désigne par a un point de la conique $\mathcal{E}$, commune à V et au plan de l'infini, la quadrique H, menée par la courbe σ et le point a, contiendra la conique $\mathcal{E}$. De plus (théorèmes X et XI), les quadriques H et V sont touchées par une même droite aux quatre points de rebroussement de S; il en résulte immédiatement qu'elles sont inscrites l'une à l'autre le long de la conique $\mathcal{E}$ à l'infini. C. Q. F. D.

Il n'y aurait d'exception à ce raisonnement que si, en deux des points de rebroussement, p et q par exemple, la droite qui touche H et V était tangente à $\mathcal{E}$; les deux quadriques pourraient alors se couper suivant une seconde conique passant par les deux autres points de rebroussement, r et s. Mais (théorème IX) la droite fixe qui touche les quadriques,

telles que H au point p, est dans le plan tangent à S en ce point : elle ne peut donc toucher la conique $\mathcal{E}$ que si cette conique est tangente en p au cercle de l'infini.

En ce cas, deux des points de rebroussement de la cyclide S sont confondus, puisque ces points sont à l'intersection de $\mathcal{E}$ et du cercle de l'infini : c'est là un cas particulier que nous écartons pour le moment.

Le théorème est donc démontré, pour les cycliques générales, à quatre points de rebroussement distincts.

THÉORÈME XXXVII. — *Le lieu des centres des quadriques incrites à une cyclide est une cubique gauche, dont les trois directions asymptotiques sont rectangulaires* (¹).

Ce lieu est, en effet, le même que celui des centres des quadriques passant par une cyclique σ, située sur S et ayant pour centre le centre o de la cyclide, et l'on sait qu'un pareil lieu est une cubique gauche.

Les trois points à l'infini de cette cubique se déterminent aisément : ce sont les centres, c'est-à-dire les points de contact avec le plan de l'infini, des trois paraboloïdes qui passent par σ; et, comme σ coupe le plan de l'infini aux points de rebroussement p, q, r, s de la cyclide, les points à l'infini de la cubique seront les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère $pqrs$.

En d'autres termes :

Les directions asymptotiques de la cubique gauche sont les directions axiales des quadriques inscrites à la cyclide S (théorèmes X et XI).

Nous donnerons à cette cubique le nom de *cubique principale* de la cyclide.

THÉORÈME XXXVIII. — *La cubique principale passe par le centre et les cinq pôles principaux de la cyclide; elle est déterminée par ces points.*

Car : 1° elle est le lieu des centres des quadriques menées par une

---

(¹) Ce théorème et le précédent se déduiraient sans difficulté de l'équation générale des quadriques inscrites à une cyclide, donnée par M. Darboux, *loc. cit.*, p. 110.

cyclique située sur une sphère concentrique à S (théorème XXXVI); 2° les cinq pôles principaux sont les sommets de cinq cônes inscrits à S (§ 10); 3° une cubique gauche est déterminée par six points de l'espace.

Théorème XXXIX. — *La cubique principale est le lieu des pieds des normales abaissées du centre d'une cyclide sur les quadriques inscrites à cette surface.*

Soient V une quadrique inscrite à S suivant une cyclique σ, située sur une sphère Σ, ayant pour centre le centre o de la cyclide, et a le pied d'une normale abaissée de o sur cette quadrique.

Les deux génératrices de V, menées par a, coupent respectivement σ (ou Σ) en deux points m et n, m' et n'; le point a est le milieu des segments mn et $m'n'$. En effet, le plan $mnm'n'$, tangent à V en a, coupe la sphère Σ, suivant un cercle dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée de o sur ce plan, c'est-à-dire, par hypothèse, le point a.

Cela posé, soient m'' un point quelconque de σ et n'' son symétrique par rapport au point a; la quadrique H qui passe par la cyclique σ et le point n'' a trois cordes, non situées dans un même plan, divisées en parties égales par le point a; ce point est donc le centre de H et, par suite, est sur la cubique principale (théorème XXXVI). C. Q. F. D.

Théorème XL. — *La cubique principale d'une cyclide est le lieu des centres des cyclides homofocales à cette surface.*

Car le centre d'une cyclide homofocale à S est le centre d'une quadrique inscrite à cette surface (§ 15). C. Q. F. D.

Il en résulte immédiatement que :

Théorème XLI. — *Les cyclides homofocales ont même cubique principale.*

On aurait pu le démontrer directement, car on sait que les quadriques homofocales à une quadrique V, inscrite à S, sont inscrites aux cyclides homofocales à S (§ 20).

On verrait de même que :

La cubique principale d'une cyclide est le lieu des centres des quadriques passant par une des focales.

Les pieds des normales abaissées du centre d'une sphère directrice sur la déférente correspondante sont sur la cubique principale ([1]).

THÉORÈME XLII. — *Les pieds des normales abaissées sur une cyclide du centre de cette surface sont sur la cubique principale.*

En effet, soit a le pied d'une telle normale ; la quadrique V, inscrite à S suivant une cyclique de centre o et de rayon oa, est normale en a à la droite oa; par suite (théorème XXXIX), le point a est sur la cubique principale.

Les pieds des normales abaissées sur une cyclide du centre de cette surface sont des points remarquables.

Les deux asymptotes de l'indicatrice y coupent la cyclide en quatre points confondus.

Cela résulte immédiatement du théorème II : le centre des moyennes de quatre points d'une cyclide, situés sur une droite, est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du centre de la cyclide.

Appelons de tels points : *points asymptotiques*. On aura cette proposition :

Le lieu des points asymptotiques d'un système de cyclides homofocales est la cubique principale.

Il résulte également du théorème XLII que les normales, menées à une cyclide de son centre, sont sur un cône de second degré.

THÉORÈME. — *La cubique principale est le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant des coniques sphériques* ([2]).

Nous avons vu, en effet (§ 19), que les centres de six coniques sphériques d'un groupe V, situées sur S, sont les pieds des normales abaissées

---

([1]) Ce théorème a été donné par M. Darboux, *loc. cit.*, p. 169.
([2]) Cette proposition est due à M. Darboux, *loc. cit.*, p. 169.

du centre o' de la quadrique V sur une quadrique U. Or le point o' est le centre d'une cyclide S homofocale à S_V et inscrite à U (§ 15 et 16); les six points en question sont donc (théorème XXXIX) sur la cubique principale de S_V, c'est-à-dire de S.

Nous allons maintenant étudier les relations de certaines sections planes remarquables d'une cyclide avec la cubique principale; mais, avant d'aborder ce sujet, nous exposerons sommairement quelques propriétés des cycliques planes.

24. — De quelques propriétés des cycliques planes.

Un plan quelconque P coupe une cyclide S, suivant une cyclique plane α, à laquelle sont inscrites (§ 5) les coniques communes au plan P et aux quadriques V inscrites à S; de plus (théorème XXXVI), ces coniques sont homothétiques aux sections faites par le plan P, dans les quadriques qui passent par une cyclique quelconque σ, située sur S et concentrique à cette surface.

En d'autres termes, les coniques inscrites à α sont homothétiques aux coniques, qui passent par les quatre points de contact de l'une d'elles et de α; ces quatre points (théorème 6, § 4) sont, d'ailleurs, sur un cercle ayant pour centre le centre o' de α.

Il résulte de là que :

Théorème XLIII. — *Le lieu des centres des coniques inscrites à une cyclique plane est une hyperbole équilatère* (¹).

Cette hyperbole passe, d'après ce qui précède, par le centre o' de la courbe α; nous lui donnerons le nom de *conique principale* de la cyclique.

La conique principale est donc à la fois le lieu des centres des coniques inscrites à α, et des coniques passant par les quatre points de contact d'une quelconque de ces courbes.

(¹) Le théorème correspondant a été énoncé, pour les courbes du quatrième degré à deux points doubles, par M. Zeuthen (*Sur quelques-unes des propriétés des courbes du quatrième ordre à deux points doubles*, p. 2 du *Résumé français*).

On sait, par la théorie des coniques, que les pieds des normales abaissées du centre d'un cercle sur les coniques qui coupent ce cercle en quatre points fixes sont sur l'hyperbole équilatère, lieu des centres des coniques passant par ces points; il en résulte que :

Théorème XLIV. — *La conique principale d'une cyclique est le lieu des pieds des normales abaissées du centre de cette courbe sur les coniques inscrites.*

On en conclut immédiatement cet autre théorème :

Corollaire. — *Les pieds des normales menées à une cyclique du centre de cette courbe sont sur la conique principale.*

Théorème XLV. — *Si la conique principale d'une cyclique α se décompose en deux droites rectangulaires, celle de ces droites qui contient le centre o' de α est un axe de symétrie de la cyclique.*

Soient en effet a, b, c, d quatre points de α, situés sur un cercle ayant pour centre le point o' : on démontre aisément que le lieu des centres des coniques passant par ces points, c'est-à-dire la conique principale de α, ne se décompose en deux droites que si les droites ab et cd, par exemple, sont parallèles.

En ce cas, les coniques passant par a, b, c, d ont leurs centres sur la perpendiculaire ϖ menée de o' aux droites ab et cd; elles sont de plus symétriques par rapport à ϖ. En dernier lieu, la conique constituée par les droites ab et cd a une infinité de centres, situés sur une perpendiculaire ϖ' à ϖ, menée à égale distance de ab et de cd : les droites ϖ et ϖ' forment la conique principale.

Les coniques inscrites à α sont concentriques à celles qui passent par a, b, c, d : elles ont donc leurs centres sur ϖ et sont symétriques par rapport à cette droite. Il en est dès lors de même de la cyclique α, qui est l'enveloppe de ces coniques. C. Q. F. D.

Remarquons enfin qu'une des coniques inscrites à α, étant concentrique et homothétique à celle que constituent les droites parallèles ab et cd, se décomposera en deux droites parallèles aux précédentes, ets ymétriques par rapport à ϖ', chacune d'elles étant doublement tangente à α.

La réciproque du théorème précédent est vraie :

Si une cyclique α est symétrique par rapport à une droite ϖ, le centre de cette courbe est sur ϖ et sa conique principale se décompose en deux droites rectangulaires, dont l'une est la droite ϖ.

En effet, le centre des moyennes distances de quatre points de α situés sur une perpendiculaire à ϖ est à l'intersection de cette droite et de ϖ; on en conclut (théorème I) que le centre o' de α est sur ϖ.

Les quatre points a, b, c, d où un cercle quelconque de centre o' coupe α sont symétriques deux à deux par rapport à ϖ; et par suite le lieu des centres des coniques qui passent par ces points, c'est-à-dire la conique principale, se décompose en deux droites dont l'une est ϖ.

Nous appellerons *spiriques,* selon l'usage, les cycliques planes à un axe de symétrie.

On démontrerait de même les propositions suivantes :

Théorème XLVI. — *Si la conique principale d'une cyclique α se décompose en deux droites rectangulaires ϖ et ϖ' se coupant au centre o' de la courbe, cette dernière sera symétrique par rapport aux droites ϖ et ϖ'.*

Inversement :

Si une cyclique plane α est symétrique par rapport à deux droites ϖ et ϖ', le centre de cette courbe est à l'intersection de ces droites, dont l'ensemble constitue la conique principale de α.

Les cycliques planes à deux axes de symétrie présentent la particularité suivante :

Théorème XLVII. — *Le centre d'une cyclique à deux axes de symétrie coïncide avec un des pôles principaux de cette courbe, et réciproquement.*

Car le centre o' d'une cyclique α à deux axes de symétrie est, d'après ce qui précède, au point de rencontre de ces axes : c'est donc un *centre* dans le sens ordinaire du mot. Il en résulte immédiatement, en raison de la symétrie, que les tangentes menées à α par le point o' sont des tangentes doubles, symétriques deux à deux par rapport aux axes; et que les quatre

points de contact de deux tangentes symétriques sont sur un cercle : par suite, le point o', commun à ces droites, est un pôle principal de α (§ 5).

Il y a même deux pôles principaux confondus en o', car on peut mener par ce point à la cyclique huit tangentes, c'est-à-dire quatre tangentes doubles, constituant deux coniques inscrites.

Inversement. — Si le centre o' de α est un pôle principal, on pourra mener par ce point à la cyclique deux tangentes doubles, constituant une conique inscrite, et les quatre points de contact a, b, c, d seront sur un cercle de centre o'; le quadrilatère $abcd$ est donc un rectangle et la cyclique α aura, d'après ce qui précède, deux axes de symétrie. C. Q. F. D.

Remarque. — Les coniques passant par quatre points a, b, c, d d'une cyclique α, situés sur un cercle de centre o', ont leurs axes parallèles aux bissectrices des droites ab et cd; comme elles sont concentriques et homothétiques aux coniques inscrites à α, on a le résultat suivant :

Les coniques inscrites à une cyclique ont leurs axes parallèles à deux directions fixes.

Et de plus :

Les asymptotes de la conique principale sont parallèles à ces mêmes directions.

Car les directions asymptotiques de cette conique sont celles des axes des paraboles passant par les points a, b, c, d.

On en conclut également, puisque les coniques inscrites à α sont les sections faites par le plan de cette courbe dans les quadriques inscrites à S, que :

Les sections par un même plan des quadriques inscrites à une cyclide ont leurs axes parallèles.

Et par suite :

Les sections par un même plan ou par des plans parallèles *des quadriques inscrites à une cyclide ont leurs axes parallèles.*

Ou :

THÉORÈME XLVIII. — *Les coniques principales des cycliques, inter-*

sections d'une cyclide et d'une série de plans parallèles à un plan fixe, ont mêmes directions asymptotiques.

25. — Des sections planes d'une cyclide.

Détermination de la conique principale d'une section plane.

La conique principale de la cyclide α commune à un plan P et à une cyclide S se détermine aisément quand la cubique principale de la surface est donnée.

Soient en effet k, l, m les points où le plan considéré P coupe la cubique principale. Ces points sont respectivement les centres de trois quadriques inscrites à S; et les sections de ces quadriques par le plan P sont des coniques inscrites à α, ayant pour centres les points k, l, m. Il en résulte que la conique principale de α passe par ces trois points. Comme c'est une hyperbole équilatère, elle passe également par le point de concours n des hauteurs du triangle klm; enfin elle passe par le centre o' de α qui est (théorème I, § 1) la projection du centre o de la cyclide sur le plan P.

On a donc cinq points k, l, m, n, o' de la conique principale de α, et par suite cette courbe est déterminée sans ambiguïté.

Il n'y aurait exception que si le point o' coïncidait avec un des points k, l, m, n. Examinons d'abord ces cas particuliers.

Nous appellerons :

Cubique triorthogonale une cubique gauche dont les trois directions asymptotiques sont rectangulaires deux à deux;

Corde d'une cubique gauche toute droite coupant cette courbe en deux points.

Il est clair que le cône qui a pour sommet un point d'une cubique triorthogonale et pour directrice cette courbe est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits : les trois droites qui joignent le point considéré aux points à l'infini de la cubique sont en effet rectangulaires deux à deux, par suite de l'hypothèse.

Il en résulte que la section d'un pareil cône par un plan perpendiculaire à une génératrice est une hyperbole équilatère.

Rappelons enfin qu'on peut mener une et une seule corde d'une cubique gauche par un point de l'espace non situé sur cette courbe.

LEMME. — *Soient k, l, m trois points d'une cubique triorthogonale θ; la perpendiculaire élevée sur le plan* P *du triangle klm au point de rencontre n de ses hauteurs est une corde de la cubique.*

En effet il existe, d'après ce qui précède, une droite δ perpendiculaire au plan P et rencontrant la cubique θ en deux points h et i.

Le cône H, qui a h pour sommet et θ pour directrice, est coupé par le plan P, normal à la génératrice hi, suivant une hyperbole équilatère; passant par k, l, m et par suite par n, elle passe également par le point o' où la droite hi coupe le plan P.

De même le cône I, qui a i pour sommet et θ pour directrice, coupe P suivant une hyperbole passant par les cinq points k, l, m, n et o', c'est-à-dire l'hyperbole précédente. Or les cônes H et I, qui se coupent déjà suivant θ et δ, ne peuvent avoir de courbe commune dans le plan P.

Pour échapper à cette conclusion, il faut, puisque les points k, l, m, quelle que soit leur position, déterminent un faisceau d'hyperboles équilatères passant par n, que le point o' coïncide avec un des points k, l, m, n.

S'il coïncide avec n, le théorème est démontré.

S'il coïncide avec k, par exemple, un des points h et i coïncide également avec k; le plan P, qui est perpendiculaire à la droite hik, coupe le cône qui a k pour sommet et θ pour directrice suivant deux droites rectangulaires; en d'autres termes, les droites kl et km sont à angle droit. Il en résulte que k est le point de rencontre des hauteurs du triangle klm, et le lemme subsiste. C. Q. F. D.

Reprenons maintenant les raisonnements faits au commencement du paragraphe actuel : nous avons vu que la conique principale de la cyclique commune à S et à un plan P, coupant la cubique principale aux points k, l, m, était déterminée toutes les fois que la projection o' du centre o

de S sur le plan P ne coïncidait pas avec un des sommets ou avec le point de rencontre des hauteurs du triangle klm.

S'il en est autrement, il résulte du lemme précédent que le plan P sera perpendiculaire à une corde de la cubique principale passant par le point o.

Soit oo'_1 cette corde, rencontrant la cubique principale aux points o et o'_1. Les coniques principales des sections, faites dans la cyclide S par des plans perpendiculaires à oo'_1, ont mêmes directions asymptotiques (théorème XLVIII); pour déterminer ces directions, nous allons étudier la section faite dans la cyclide par le plan perpendiculaire à oo'_1 au point o'_1; on a à cet égard le théorème suivant :

THÉORÈME XLIX. — *Les plans qui coupent une cyclide* S *suivant des cycliques à deux axes de symétrie enveloppent une développable, dont la podaire, par rapport au centre de la cyclide, coïncide avec la cubique principale.*

En effet, pour que l'intersection α_1 de S et d'un plan P_1 ait deux axes de symétrie, il faut et il suffit que le centre de α soit un pôle principal de cette courbe (théorème XLVII), c'est-à-dire que la projection o'_1 du centre o de S sur P_1 coïncide (théorème XV) avec le point de contact de P_1 et d'une quadrique V inscrite à S.

Le point o'_1 est donc le pied d'une normale menée de o à une des quadriques V, et le plan P_1 est le plan tangent à cette quadrique en o'_1; or les pieds des normales abaissées de o sur les quadriques inscrites à S sont (théorème XXXIX) sur la cubique principale; et, par suite, le point o'_1 est sur cette cubique. La condition est évidemment suffisante. C. Q. F. D.

On peut ainsi dire que :

La cubique principale est le lieu des centres des cycliques planes à deux axes de symétrie qu'on peut tracer sur la cyclide.

Remarque I. — Le plan P_1, normal à la droite oo'_1 au point o'_1 de la cubique principale coupe cette courbe en deux autres points l_1 et m_1.

Or la conique principale de α_1 se décompose (théorème XLVI) en

deux droites rectangulaires se coupant en o'_1 et passant par l_1 et m_1 (§ **25**); ces droites sont donc les droites $o'_1 l_1$ et $o'_1 m_1$.

Cela posé, nous pouvons déterminer la conique principale de la section α, faite dans la cyclide S par un plan P, perpendiculaire à une corde oo'_1 de la cubique principale et courbant cette courbe aux points k, l, m_1 : ce sera une hyperbole équilatère passant par k, l, m et ayant ses asymptotes parallèles à $o'_1 l_1$ et $o'_1 m_1$.

Nous allons démontrer maintenant un théorème, qui mettra en évidence une relation importante entre les coniques principales des sections, faites dans une cyclide par une série de plans parallèles.

Théorème L. — *Les coniques principales des sections, faites dans une cyclide* S *par une série de plans parallèles, sont sur une même quadrique* H.

Cette quadrique H *passe par la cubique principale de la cyclide* S *et par la normale menée du centre de cette surface aux plans considérés.*

En effet, soit un plan quelconque P, coupant la cyclide S suivant une courbe α et rencontrant la cubique principale aux points k, l, m; la droite δ normale à ce plan, au point de rencontre n des hauteurs du triangle klm, coupe la cubique en deux points h et i, d'après le lemme démontré plus haut.

Soit δ' la parallèle à δ issue du centre o de la cyclide S. La conique principale de α est l'hyperbole équilatère, qui passe par les points k, l, m, n et par le pied o' de la normale δ'.

Or on peut faire passer par la cubique principale et par la droite δ', qui rencontre cette courbe au point o, une et une seule quadrique, que nous appellerons H; cette quadrique renferme la droite δ, qu'elle coupe aux points h, i et au point (à l'infini) où δ rencontre δ'. Elle passe dès lors par les points k, l, m, n et o' et, par suite, coupe en ces cinq points la conique principale de α; cette conique est donc sur la quadrique H, qui ne dépend que de la direction du plan P. C. Q. F. D.

Remarque II. — Ce raisonnement suppose essentiellement que les droites δ et δ' sont distinctes, c'est-à-dire que le plan P n'est pas normal à

une corde de la cubique principale, issue du point o. Dans le cas contraire, on a le théorème suivant :

Les coniques principales des sections faites dans une cyclide par une série de plans perpendiculaires à une même corde de la cubique principale, issue du centre de la cyclide, sont sur un cône du second ordre.

Ce cône a pour directrice la cubique principale, et pour sommet le point o'_1 où cette courbe est rencontrée de nouveau par la corde considérée.

En effet, en appelant toujours k, l, m les points communs à P et à la cubique, la conique principale de α est une hyperbole équilatère passant par k, l, m et ayant ses asymptotes parallèles aux cordes $o'_1 l_1$ et $o'_1 m_1$, situées dans un plan P_1 normal en o'_1 à la droite oo'_1 ; cette hyperbole coupe ainsi le cône en question aux points k, l, m et aux deux points à l'infini sur les droites $o'_1 l_1$ et $o'_1 m_1$; elle est donc sur ce cône. C. Q. F. D.

Le théorème L *et la remarque ci-dessus permettent de déterminer, dans tous les cas, la conique principale de la section, faite par un plan donné dans une cyclide.*

On voit que les sections, faites dans une cyclide par des plans parallèles, ont leurs coniques principales semblables et semblablement placées.

Proposons-nous maintenant de déterminer les *spiriques situées sur une cyclide.*

Des spiriques situées sur une cyclide.

Pour qu'un plan P, rencontrant la cubique principale aux points k, l, m, coupe S suivant une spirique α, il faut et il suffit que la conique principale de α se décompose en deux droites (théorème XLV) ; cette conique passant par les points k, l, m, par le point de rencontre n des hauteurs du triangle klm, et par le pied o' de la normale menée de o au plan P, il faut et il suffit que trois des points k, l, m, n, o' soient en ligne droite.

Les points k, l, m ne peuvent être sur une droite, sinon un plan passant par ces points et un autre point de la cubique couperait en quatre points cette courbe qui se décomposerait en courbes de degré moindre, cas que nous écartons pour le moment.

Il faut donc, pour que α soit une spirique, que le point o' soit sur un côté ou sur une hauteur du triangle *klm*.

1° Si le point o' est sur la hauteur *kn*, il doit coïncider avec le point *n*; en effet, la normale en *n* au plan P coupe la cubique principale en deux points *h* et *i* (lemme, § 23), et si le point o' différait de *n*, le plan mené par *kn* perpendiculairement au plan P couperait la cubique principale aux quatre points *k*, *h*, *i* et *o*, ce qui est absurde.

Le plan P est donc normal à une corde de la cubique, issue du point *o* et coupant la cubique en un second point o'_1.

Mais la conique principale de la cyclique α est alors (théorème L, *remarque*) l'intersection du plan P et du cône qui a o'_1 pour sommet et la cubique principale pour directrice; cette intersection ne devient un système de deux droites, que si P passe par o'_1. En ce cas, nous savons (théorème XLIX) que α est une spirique à deux axes de symétrie.

2° Si le point o' est sur le côté *lm* du triangle *klm*, la conique principale de α se décompose en deux droites, *lm* et *kn*; et la cyclique α est une spirique dont la droite *lm* est l'axe (théorème XLV).

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème LI. — *Les axes des spiriques qu'on peut tracer sur une cyclide sont des cordes de la cubique principale.*

Inversement :

Toute corde de la cubique principale est l'axe d'une spirique tracée sur la cyclide; le plan de cette spirique est perpendiculaire au plan qui passe par la corde considérée et par le centre de la surface.

Les cyclides homofocales ayant (théorème XLI) même cubique principale, on peut dire que :

Les axes des spiriques situées sur les cyclides d'un système homofocal sont des cordes de la cubique principale.

Un plan quelconque coupe suivant des spiriques trois cyclides d'un système homofocal.

Car soient *k*, *l*, *m* les points communs au plan considéré P et à la cubique principale; le plan mené par *kl* perpendiculairement au plan P

coupe la cubique principale aux points k, l, o : la cyclide du système homofocal dont le centre est o est coupée par le plan P suivant une spirique (théorème LI).

On peut encore étudier la question des spiriques tracées sur une cyclide en s'appuyant sur le théorème L.

Considérons en effet un plan parallèle à un plan donné Π; nous supposerons d'abord que la normale menée à ce plan par le centre o de la cyclide S n'est pas une corde de la cubique principale.

Soit H la quadrique qui passe par cette cubique et par la normale menée de o au plan Π; les coniques principales des sections faites dans S par des plans parallèles à Π sont sur H : donc, pour qu'une de ces sections soit une spirique, il faut et il suffit (théorème XLV) que son plan touche H.

En d'autres termes :

Il existe en général deux plans parallèles à un plan donné et coupant une cyclide suivant une spirique.

Si la normale au plan Π issue de o est une corde de la cubique principale, coupant cette courbe en un second point o'_1, la quadrique H devient un cône de sommet o'_1, et le plan P ne coupera ce cône suivant deux droites que s'il passe par o'_1.

Donc :

Si la normale menée à un plan par le centre d'une cyclide est une corde de la cubique principale, il n'existe qu'un plan parallèle au premier coupant la surface suivant une spirique; cette spirique a (théorème XLIX) *deux axes de symétrie.*

Dans le cas où la quadrique H n'est pas un cône, nous avons supposé qu'on ne pouvait lui mener que deux plans tangents parallèles au plan Π; c'est bien le cas général, mais il peut arriver que tous les plans parallèles à Π touchent H. H sera alors un paraboloïde admettant Π comme plan directeur.

De plus, Π devra être perpendiculaire à la génératrice de H qui passe par o, et qui n'est pas une corde de θ.

(On sait en effet que, si une quadrique passe par une cubique gauche, les génératrices d'un système rencontrent la cubique une fois, celle de l'autre deux fois.)

La recherche des cas spéciaux dont il s'agit se ramène donc au problème suivant :

Mener par une cubique triorthogonale θ *un paraboloïde* H, *tel que la génératrice de la surface qui passe par un point donné o de la cubique et qui n'est pas une corde de cette courbe soit normale à l'un des plans directeurs.*

C'est ce problème que nous allons chercher à résoudre.

Soient x, y, z les points à l'infini de θ.

Tout paraboloïde H passant par θ coupe le plan de l'infini suivant deux génératrices dont l'une est une des droites xy, xz, yz; xy par exemple, et dont l'autre passe par le point z.

Par le point o passent deux génératrices de H; l'une δ rencontre θ en un point, l'autre δ' en deux points : il est clair, d'après une propriété rappelée plus haut, que δ' est du même système que la génératrice xy; en d'autres termes, δ rencontre xy et est située dans le plan xoy.

Inversement toute quadrique passant par θ et par une droite δ issue de o dans le plan xoy, autre que ox et oy, est un paraboloïde H, puisqu'elle a trois points à l'infini en ligne droite, et le plan xoy est un de ses plans directeurs.

Le deuxième plan directeur coupe le plan de l'infini suivant une droite passant par le point z : soit P le plan parallèle passant par o; il contient la droite oz, et renferme la seconde génératrice δ' de H, menée par le point o.

Il s'agit de déterminer H, de façon que la droite δ soit normale au plan P : le plan des droites δ et δ' est alors perpendiculaire à P. Cette condition nécessaire est également suffisante; car, si elle est remplie, δ, étant l'intersection de deux plans xoy et (δ, δ') perpendiculaires à P, sera normale à P.

Or le plan des droites δ et δ' est le plan tangent au point o au paraboloïde H : il contient donc la tangente τ menée en ce point à la cubique θ;

la droite δ', étant d'ailleurs une corde de cette cubique, est une génératrice du cône G qui a o pour sommet et θ pour directrice. Remarquons de plus que les droites ox, oy, oz et τ sont des génératrices de ce cône.

La condition d'orthogonalité du plan P, c'est-à-dire du plan (oz, δ') et du plan (δ, δ'), c'est-à-dire du plan des droites τ et δ', peut donc se traduire ainsi :

Trouver une génératrice δ' du cône G telle que le plan passant par δ' et par oz soit perpendiculaire au plan qui passe par δ' et par τ.

Or on sait que, si par les droites τ et oz on mène deux plans rectangulaires, l'intersection de ces plans décrit un cône du second ordre passant par τ et oz.

Ce cône (abstraction faite des génératrices oz et τ) coupe le cône G suivant deux droites δ'_1 et δ'_2, qui répondent à la question. Soient δ_1 et δ_2 les droites du plan xoy respectivement perpendiculaires aux plans (oz, δ'_1) et (oz, δ'_2); les paraboloïdes H_1 et H_2 qui passent respectivement par les droites δ_1 et δ_2 et par la cubique θ résolvent le problème posé plus haut.

En considérant au lieu de la droite xy l'une des droites xz et yz, on aurait trouvé quatre autres paraboloïdes. Ainsi :

Il existe six séries de plans parallèles, coupant une cyclide suivant des spiriques, et, en général, il n'en existe que six.

Or nous connaissons six séries de plans parallèles coupant une cyclide S suivant des spiriques; ce sont les plans qui passent par deux des points de rebroussement à l'infini p, q, r, s de S; ces plans coupent en effet la cyclide suivant des courbes ayant les deux points circulaires comme points de rebroussement, c'est-à-dire des *cartésiennes* [1].

Les plans que nous venons de rencontrer sont identiques aux plans de sections cartésiennes, puisqu'il n'y a que six séries de plans parallèles coupant une cyclide générale suivant des spiriques.

Les considérations développées plus haut nous montrent que les direc-

---

[1] *Voir* Darboux, *loc. cit.*, p. 170.

tions des plans de sections cartésiennes ne dépendent que du centre et de la cubique principale de la cyclide; par suite :

Les cyclides ayant même centre et même cubique principale ont mêmes points de rebroussement à l'infini.

On a de plus la proposition suivante :

Dans une cyclide, les axes des sections cartésiennes situées dans des plans parallèles décrivent un paraboloïde passant par la cubique principale, et dont un plan directeur est parallèle aux plans des sections considérées.

Remarque. — Les plans des sections cartésiennes passant par les droites pq et rs (p, q, r, s étant les points de rebroussement de S) peuvent être regardés comme tangents à celui des trois paraboloïdes V′, inscrits à S, qui passe par ces mêmes droites (§ 5, *remarque* I).

Il en résulte que les sections faites par ces plans dans S sont des cycliques du groupe V′; et par suite, d'après le théorème 3 du § 14 et la remarque du § 9, les trois foyers [1] d'une de ces cycliques, situés sur son axe, sont sur une cyclide du troisième ordre homofocale à S.

En d'autres termes, en appelant ces foyers *foyers principaux,* on a cette proposition :

Dans une cyclide, le lieu des foyers principaux des sections cartésiennes parallèles à un même plan est l'intersection du paraboloïde du théorème précédent et d'une cyclide du troisième ordre homofocale à la proposée.

Parmi les *spiriques* que l'on peut tracer sur une cyclique il faut distinguer celles qui se décomposent en *deux cercles ;* l'axe est alors la ligne des centres.

Le théorème LI, appliqué à ces spiriques, donne la proposition suivante :

Soient deux cercles d'une cyclide, situés dans un même plan; la droite qui joint leurs centres est une corde de la cubique principale.

---

[1] On sait en effet qu'une cartésienne plane a trois foyers sur son axe, à distance finie.

Nous savons (§ 10) que les plans qui coupent une cyclide S de centre o suivant deux cercles sont ceux qui touchent l'un des cinq cônes inscrits à S. Soit V_1 l'un de ces cônes, de sommet g_1. Proposons-nous de déterminer les plans tangents à V_1 qui coupent S suivant deux cercles égaux.

La spirique correspondante aura deux axes de symétrie, et l'on voit, en se reportant au théorème XLIX, que le problème peut s'énoncer ainsi :

Trouver sur la cubique principale un point o'_1, tel que le plan mené par ce point normalement à la droite oo'_1 soit tangent au cône V_1.

Le point o'_1 est ainsi le pied d'une normale abaissée du point o sur le cône V_1 ; or on sait que les pieds des normales menés de o aux quadriques inscrites à S sont sur la cubique principale (théorème XXXIX) : le problème est donc possible et a quatre solutions, puisque d'un point on peut mener quatre normales à un cône. Ainsi :

Soit o'_1 le pied d'une normale menée du centre d'une cyclide à un cône inscrit à cette surface; le plan tangent en o'_1 à ce cône coupe la cyclide suivant deux cercles égaux, dont les centres sont équidistants du point o'_1 et en ligne droite avec ce point.

Il y a donc vingt plans coupant une cyclide suivant deux cercles égaux.

On peut étudier à un autre point de vue tout différent *les spiriques tracées sur une cyclide.*

Nous avons vu en effet (démonstration du théorème XLV) qu'une des coniques inscrites à une spirique se décompose en deux droites perpendiculaires à l'axe de la courbe; en d'autres termes, une spirique a un pôle principal à l'infini, dans une direction perpendiculaire à son axe.

Inversement, toute cyclique plane ayant un pôle principal à l'infini est une spirique.

Une cyclique, en effet, est anallagmatique par rapport à un quelconque g de ses pôles principaux; si donc on désigne par a et b deux points de la courbe situés sur une droite issue de g, et tels que le produit $ga.gb$ soit égal à la puissance d'inversion qui correspond au pôle g, le cercle passant par a, b et un point quelconque a' de la cyclique coupera cette courbe en un quatrième point b', situé sur la droite ga'. Si le point g s'éloigne à

l'infini, les droites ab et $a'b'$ deviendront parallèles; et, comme les points (a, b), $(a' b')$ sont sur un cercle, la droite perpendiculaire au segment ab en son milieu sera aussi perpendiculaire au segment $a'b'$ en son milieu : les points de la cyclique sont donc deux à deux symétriques par rapport à cette droite. C. Q. F. D.

Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclique ait un axe de symétrie est qu'un de ses pôles principaux soit à l'infini.

Or les pôles principaux d'une cyclique α située à l'intersection d'une cyclide S et d'un plan P étant les points de contact de ce plan avec quatre quadriques inscrites à V (théorème XV), la courbe α sera une spirique si l'un de ces points est à l'infini, c'est-à-dire si le plan P touche le cône asymptote d'une des quadriques V. Donc :

Un plan qui coupe une cyclide suivant une spirique touche le cône asymptote d'une des quadriques inscrites dans cette surface.

Et par suite :

La surface enveloppe des plans qui coupent une cyclide suivant des spiriques est aussi l'enveloppe des cônes asymptotes des quadriques inscrites à la cyclide.

Ces cônes asymptotes touchent, aux quatre points de rebroussement de la cyclide, quatre droites fixes (théorème XI) : ils ont donc huit points communs, et leur enveloppe est un cas particulier de l'enveloppe des cônes du second ordre passant par sept points.

26. — De quelques propriétés des normales a une cyclide.

Nous avons déjà rencontré au sujet des normales à une cyclide le théorème XLII :

Les pieds des normales abaissées sur une cyclide du centre de cette surface sont sur la cubique principale.

La cubique principale coupant la cyclide en douze points, on peut du

centre d'une cyclide lui mener douze normales qui sont sur un cône du second degré.

M. Darboux a démontré par le calcul que de tout point de l'espace on peut mener douze normales à une cyclide; nous admettrons ce résultat, que nous venons de vérifier dans un cas particulier.

Les normales qu'on peut mener à une cyclide d'un point quelconque de sa cubique principale jouissent de la propriété suivante :

THÉORÈME 1. — *Les douze normales menées à une cyclide d'un point de la cubique principale sont sur un cône du second degré, qui a le point considéré pour sommet et la cubique pour directrice.*

Soient, en effet, l un point de la cubique principale, n le pied d'une normale menée de l à la cyclide S.

Du centre o de cette surface abaissons sur ln une perpendiculaire, qui coupe ln en o' ; et soit P le plan mené par la droite ln normalement à la droite oo'.

P coupe S suivant une cyclique α de centre o', dont la conique principale passe par les points l et o'.

Remarquons de plus que la droite $o'n$ est normale à la cyclique α au point n, et que par suite ce point est sur la conique principale de α (théorème XLIV, corollaire). Cette conique passant par les trois points en ligne droite l, o', n se décompose en deux droites dont l'une est $o'n$, et la cyclique α est (théorème XLV) une spirique ayant $o'n$ pour axe.

On en conclut (théorème LI) que $o'n$ (ou ln) est une corde de la cubique principale.

En d'autres termes, toute normale à S issue d'un point de la cubique principale est une corde de cette courbe. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Le lieu des normales qu'on peut mener à une série de cyclides homofocales, par le centre de l'une d'elles, est un cône du second degré passant par la cubique principale.*

THÉORÈME 2. — *Tout plan passant par le centre o d'une cyclide est normal à cette surface en quatre points situés sur une droite* : o, l, m

étant les points communs au plan et à la cubique principale, cette droite est la droite lm.

Soit, en effet, lm une corde quelconque de la cubique principale, coupant la cyclide S aux quatre points a, b, c, d, que nous supposerons d'abord distincts. Le plan P mené par lm perpendiculairement au plan lmo coupe S suivant une spirique α, d'axe lm. Par conséquent, les tangentes à α aux points a, b, c, d sont perpendiculaires à lm, dans le plan P, c'est-à-dire normales au plan olm; le plan olm est donc normal à S en a, b, c, d.

C. Q. F. D.

Ce théorème peut s'énoncer autrement :

Les normales à une cyclide en quatre points situés sur une corde de la cubique principale sont dans un plan, qui passe par le centre de la surface.

Ou encore :

La normale en un point d'une cyclide et la corde de la cubique principale issue de ce point déterminent un plan qui passe par le centre de la surface.

Si deux des points a, b, c, d, a et b par exemple, coïncident, le raisonnement fait plus haut conduit à un résultat intéressant.

Soit, en effet, $l'm'$ une corde de la cubique principale, voisine de lm, et coupant S aux points a', b', c', d', voisins de a, b, c, d. Le théorème précédent s'applique; les normales à S aux points a', b', c', d' sont dans le plan $ol'm'$.

En particulier, les normales aux deux points voisins a' et b' se rencontrent.

A la limite, les points a' et b' se confondent au point a, et la droite $a'b'$ devient la droite lm; il en résulte que cette droite touche en a une des lignes de courbure de S menées par ce point.

Ainsi :

THÉORÈME 3. — *Toute corde de la cubique principale tangente à la cyclide en un point a touche en ce point une ligne de courbure.*

On peut étendre le théorème 1, qui ne s'applique qu'aux normales

rencontrant la cubique principale et obtenir une propriété très générale des normales à une cyclide. Cette propriété est la suivante :

THÉORÈME 4. — *Dans une cyclide, les pieds des normales qui rencontrent une droite δ, passant par le centre o de la surface, sont sur la quadrique qui passe par la cubique principale et par la droite δ.*

Si δ est une corde de la cubique principale, c'est-à-dire rencontre cette courbe en un second point o'_1, le lieu précédent devient le cône du second ordre qui a o'_1 pour sommet et la cubique pour directrice.

Supposons d'abord que δ ne soit pas une corde de la cubique principale, et soit n le pied d'une normale rencontrant cette droite en un point d.

Par n, menons un plan P perpendiculaire à δ, coupant δ en un point o'. La droite $o'n$ est normale en n à la cyclique α, de centre o', commune au plan P et à la cyclide S; et, par conséquent, le point n est sur la conique principale de α (théorème XLIV, corollaire).

Or cette conique est à l'intersection du plan P et de la quadrique H, qui passe par la cubique principale et la droite δ (théorème L); le point n est donc sur cette quadrique. C. Q. F. D.

La démonstration est la même, si l'on suppose que δ est une corde de la cubique principale, coupant cette courbe aux points o et o'_1; la quadrique H est alors, d'après la *Remarque* qui suit le théorème L, le cône de sommet o'_1 qui passe par la cubique. C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème est vraie et peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 5. — *Les normales à une cyclide en des points situés sur une quadrique quelconque, passant par la cubique principale, rencontrent une droite fixe, située sur cette quadrique et passant par le centre de la cyclide.*

La démonstration analogue à la précédente n'offre aucune difficulté.

Si l'on remarque qu'on peut toujours faire passer une et une seule quadrique par une cubique gauche et par une droite coupant cette courbe en un point, on obtient, comme corollaire du théorème 5, la proposition suivante déjà rencontrée § 20, 8 :

Les normales à une cyclide en quatre points situés sur une droite quelconque, coupant la cubique principale en un point, rencontrent une droite issue du centre de la surface.

De même :

Les normales à une cyclide en huit points situés sur une conique, qui coupe la cubique principale en trois points, rencontrent une droite qui passe par le centre de la surface et s'appuie sur la conique.

Les normales à une cyclide en quatre points situés sur un cercle, qui coupe la cubique principale en trois points, rencontrent une droite qui passe par le centre de la surface et s'appuie sur le cercle.

Cette droite reste la même pour les cercles situés dans des plans parallèles.

Une autre application du théorème 5 est relative à la détermination des *centres de courbure principaux* en un point d'une cyclide.

Soient a et a' deux points de la cyclide S; les normales à S, en ces deux points, rencontrent (théorème 5) une droite δ, issue du point o et située sur la quadrique qui passe par la cubique principale et par les points a et a'.

Si les normales en a et a' se coupent, leur point d'intersection sera sur la droite δ et, par suite, sur la quadrique précédente; *il n'y aurait exception que si le plan des deux normales passait par* o, c'est-à-dire, comme on le voit par le théorème 2 (troisième énoncé), si les points a et a' étaient sur une même corde de la cubique principale.

En particulier, soit a un point de S, at la tangente en ce point à une des lignes de courbure; le point de concours de la normale à S au point a et de la normale au point a', infiniment voisin de a sur la droite at, est un des centres de courbure principaux de la cyclide en a; d'après ce qui précède, il est sur la quadrique qui passe par la cubique principale et touche en a la droite at. De là, résulte la construction suivante :

Soit at un axe de l'indicatrice en un point a d'une cyclide; le plan normal mené par at coupe la cubique principale en trois points; la conique qui passe par ces points et touche en a la droite at rencontre la nor-

male au point a en un deuxième point, qui est un centre de courbure principal de la cyclide.

Plus généralement :

Les centres de courbure principaux en un point a d'une cyclide sont à l'intersection de la normale en a avec les deux quadriques, qui passent par la cubique principale et touchent respectivement au point a les lignes de courbure de la cyclide.

On peut déduire de là quelques propositions relatives à la position des centres de courbure en un point a des trois cyclides homofocales S, S', S'' qui passent par ce point.

Remarquons en effet que les cyclides ayant mêmes focales ont aussi même cubique principale (théorème XLI), et se coupent deux à deux suivant leurs lignes de courbure : si donc on désigne par ν, ν', ν'' les normales à S, S', S'' en a, et par H, H', H'' les quadriques qui passent par la cubique principale et touchent respectivement au point a les droites ν, ν', ν'', on voit que les points d'intersection (autres que a) de ν avec H' et H'', de ν' avec H et H'', de ν'' avec H et H', seront les six centres de courbure principaux des trois cyclides au point a.

De plus, les trois quadriques H, H', H'' renferment la corde de la cubique principale issue du point a, et, d'après le théorème **2**, § **26**, les plans menés par cette corde et par les droites ν, ν', ν'' passent respectivement par les centres des cyclides S, S', S''.

De là résultent sans difficulté les propositions suivantes :

1° *Soient* S, S', S'' *trois cyclides homofocales, se coupant en un point* a ; ν, ν', ν'' *leurs normales en ce point : par chacune de ces droites et le centre de la cyclide correspondante, faisons passer un plan ; les trois plans ainsi obtenus se coupent suivant une droite* λ, *qui est une corde de la cubique principale.*

2° *Le plan des droites* ν, ν' *coupe la cubique principale en trois points* k, l, m ; *les deux coniques qui passent par ces points et touchent respectivement en* a *les droites* ν *et* ν' *coupent ces droites en deux nouveaux*

points p_1 *et* p'_1 *qui sont des centres de courbure principaux de* S *et de* S′ *au point* a.

3° *La conique qui passe par les points* k, l, m, *et touche en* a *la projection de la droite* λ *sur le plan des droites* ν, ν', *coupe ces droites en deux nouveaux points, qui sont les deux autres centres de courbure principaux* p_2 *et* p'_2 *de* S *et de* S′ *au point* a.

On a des constructions analogues dans les plans des droites ν et ν'', ou ν' et ν''.

De la deuxième proposition on déduit aisément cette autre, en remarquant que les côtés de deux triangles inscrits dans une conique touchent une deuxième conique :

4° *Les points de contact avec les droites* ν *et* ν' *d'une conique tangente à ces droites et inscrite dans le triangle* klm *coïncident avec les centres de courbure principaux* p_1 *et* p'_1 *de* S *et de* S′.

Relations anharmoniques.

Nous allons passer maintenant à des considérations d'un autre ordre, et étudier la division que déterminent sur la normale en un point d'une cyclide les centres des sphères qui renferment les conjugués de ce point dans les divers systèmes de conjugaison : nous avons déjà fait connaître au § 20 quelques propositions relatives à ces centres.

Nous nous appuierons, pour compléter ces propositions, sur les lemmes suivants, faciles à démontrer :

I. *Soient quatre points d'une cubique gauche :*

Le rapport anharmonique du faisceau des quatre plans menés par ces points et une même corde de la cubique a une valeur indépendante de la position de cette corde : nous dirons que ce rapport est le rapport anharmonique des quatre points de la cubique.

II. *Le lieu des pôles d'un même plan* P *par rapport à un faisceau de quadriques est une cubique gauche* π; *considérons les pôles de* P *par rapport à quatre de ces quadriques* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; *le rapport anharmonique de*

ces points sur la cubique π reste fixe quand le plan P *varie, les quatre quadriques considérées demeurant invariables. Il est égal en particulier au rapport anharmonique des centres de ces quatre surfaces, sur la cubique θ, lieu des centres des quadriques du faisceau.*

III. *Les plans polaires d'un même point a_0, par rapport aux quadriques d'un faisceau, passent par une même droite; le rapport anharmonique des plans polaires de a_0 par rapport à quatre de ces quadriques* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *est indépendant de la position du point a_0; il est égal au rapport anharmonique des centres des surfaces* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *sur la cubique θ.*

Cela posé, le centre de la sphère qui contient les conjuguées dans un système V d'un point a_0 d'une cyclide S est à l'intersection de la normale à S au point a_0 et de la droite menée par le centre o de la cyclide normalement au plan polaire de a_0 par rapport à V (§ 20); d'un autre côté, les plans polaires de a_0 par rapport à toutes les quadriques V, inscrites à S, sont parallèles aux plans polaires de a_0 par rapport aux quadriques d'un même faisceau, passant par la courbe σ commune à S et à une sphère de centre o (théorème XXXVI).

Il résulte de là qu'en désignant par a_1, a_2, a_3, a_4 les centres des sphères qui renferment les conjugués de a_0 dans quatre systèmes V_1, V_2, V_3, V_4, le rapport anharmonique de ces quatre points (situés sur la normale en a_0 à la cyclide) est égal au rapport anharmonique des plans polaires de a_0 par rapport aux quatre quadriques qui passent par la courbe σ et qui sont respectivement homothétiques et concentriques aux quadriques V_1, V_2, V_3, V_4.

Par conséquent, ce rapport est indépendant de la position du point a_0 sur la cyclide; il est égal au rapport anharmonique des centres des quatre quadriques V_1, V_2, V_3, V_4 sur la cubique principale.

En particulier, parmi les quadriques inscrites à une cyclide S, figure le plan de l'infini compté deux fois, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend une quadrique inscrite à S suivant une cyclique de rayon indéfiniment croissant (théorème XII). Or nous savons que les quadriques inscrites à la cyclide passent par les quatre points de rebroussement à l'infini

de cette surface, et touchent une même droite en chacun de ces points (théorèmes X et XI); de plus, les plans menés par ces droites tangentiellement au cercle de l'infini passent par le centre de la cyclide (théorème VIII).

Si le rayon de la cyclique suivant laquelle une quadrique V touche S augmente indéfiniment, cette quadrique devient une surface infiniment aplatie, coupant le plan de l'infini suivant une conique infiniment voisine du cercle à l'infini; on en conclut sans difficulté que le centre de la quadrique a pour limite le centre de la cyclide, et que les droites tangentes à cette quadrique sont, à la limite, les droites qui rencontrent le cercle de l'infini.

Appelons V_0 cette quadrique limite : le cône qui a pour sommet un point a_0 de la cyclide et qui est circonscrit à V_0 est un cône isotrope; par suite, la sphère qui renferme les conjugués de a_0 dans le système V_0 coïncide avec ce cône, et son centre est au point a_0.

Il en résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Soient, sur la normale en un point a_0 d'une cyclide, les centres $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ des sphères qui renferment les conjugués de ce point dans les systèmes $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots$. ces centres déterminent sur la normale une division homographique à une division fixe, et le rapport anharmonique de quatre de ces points est égal au rapport anharmonique déterminé par les centres des quadriques* V *correspondantes sur la cubique principale de la cyclide.*

Dans les applications on devra se souvenir que le centre de la quadrique V_0, à laquelle correspond le point a_0 lui-même, coïncide avec le centre o de la cyclide.

Cette proposition donne lieu à de nombreuses conséquences.

En premier lieu, nous savons (§ 20) que la sphère qui renferme les conjugués d'un point a_0 de la cyclide dans le système défini par un cône inscrit de sommet g, et qui touche la cyclide en a_0, la touche en un second point situé sur la droite ga_0. Le centre de cette sphère est donc sur la déférente qui correspond au pôle principal g.

Nous obtenons ainsi ce théorème, dont la première partie était déjà connue par les travaux de MM. Laguerre et Darboux (¹) :

THÉORÈME 7. — *Une normale quelconque à une cyclide rencontre les cinq déférentes* D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 *en cinq points* d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, *qui sont les centres de sphères bitangentes à la cyclide et ayant un de leurs points de contact au pied de la normale : 1° ces cinq points et le pied de la normale déterminent sur cette droite une division homographique à une division fixe; 2° les rapports anharmoniques de ces points quatre à quatre sont égaux à ceux que déterminent sur la cubique principale de la cyclide les cinq pôles principaux et le centre de la surface.*

Par suite :

Les rapports anharmoniques des cinq premiers points d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 *quatre à quatre sont les mêmes pour les cyclides homofocales d'un même système.*

Cette proposition est l'extension aux cyclides d'un théorème donné par M. Mannheim (²), et qu'on peut énoncer ainsi :

Les normales aux quadriques homofocales d'un même système sont partagées par les trois plans principaux en segments proportionnels.

En second lieu, nous avons vu (§ 14) que la sphère qui renferme les conjugués dans le système V d'un point quelconque a de la ligne de courbure γ_V a pour centre un des centres de courbure principaux p_1 de la cyclide en ce point. Donc :

THÉORÈME 8. — *Si le pied a d'une normale à une cyclide décrit une ligne de courbure de cette surface, les points* d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 *du théorème précédent et l'un des centres de courbure principaux de la cyclide en a déterminent sur la normale une division homographique à une division fixe.*

(¹) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 281; *voir* aussi un Mémoire du même géomètre dans les *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. I, p. 273; 1872.

(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VIII, 1882.

Le centre de courbure dont il s'agit est à l'intersection de la normale en a et de la normale au point infiniment voisin dans une direction perpendiculaire à la ligne de courbure considérée.

Considérons la cyclide S_V, homofocale à S, qui passe par la ligne de courbure γ_V; soient $d'_1, d'_2, \ldots$ les points analogues à $d_1, d_2, \ldots$ où la normale ν' à S_V au point a rencontre les cinq déférentes de cette cyclide; $g_1, g_2, \ldots$ les pôles principaux de S et de S_V; o' le centre de V et de S_V (§ 15). D'après ce qui précède, les divisions $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, p_1)$ sur la normale ν à S au point l, et $(d'_1, d'_2, d'_3, d'_4, d'_5, l)$ sur la normale ν' à S_V, sont homographiques à la division $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, o')$ de la cubique principale; elles sont donc homographiques entre elles, et par suite :

Théorème 9. — *Soient ν, ν', ν'' les normales menées en un point a aux trois cyclides homofocales* S, S′, S″ *qui passent par ce point.*

Le centre de courbure p_1 de S *est placé homographiquement sur ν par rapport aux points $d_1, d_2, \ldots$ où cette normale rencontre les cinq déférentes de* S, *comme le point a est placé homographiquement sur ν' par rapport aux points $d'_1, d'_2, \ldots$ où cette normale rencontre les cinq déférentes de* S′. *De même, l'autre centre de courbure principal p_2 situé sur ν est placé homographiquement par rapport aux points $d_1, d_2, \ldots$, comme le point a est placé homographiquement sur ν'' par rapport aux points $d''_1, \ldots$ où cette normale rencontre les cinq déférentes de* S″.

Cette proposition est encore l'extension aux cyclides d'un théorème de M. Mannheim [1] relatif aux quadriques.

27. — D'une famille de cyclides.

Plusieurs propositions du paragraphe précédent ne mettent en jeu que le centre et la cubique principale d'une cyclide; il en est de même des théorèmes XLIX, L et LI : nous sommes amenés ainsi à étudier *les cyclides qui ont même centre et même cubique principale.*

---

[1] *Loc. cit.*

L'équation générale d'une cyclide renferme, comme on le voit aisément, treize constantes arbitraires : il faut donc treize conditions pour déterminer une cyclide.

Une cubique gauche dans l'espace est déterminée par douze conditions; si elle est triorthogonale, elle ne dépend plus que de neuf paramètres, et, par suite, se donner la cubique principale d'une cyclide, c'est assujettir cette surface à neuf conditions.

Se donner *sur cette cubique* le centre de la cyclide, c'est ajouter une condition ; en d'autres termes :

Les cyclides ayant même centre et même cubique principale sont assujetties à dix conditions; leur équation générale renferme donc trois paramètres variables.

Théorème 1. — *Les sections faites par un même plan dans les cyclides ayant même centre et même cubique principale ont même centre et même conique principale.*

Le lieu de ces coniques quand le plan se déplace parallèlement à lui-même est une quadrique.

Cela résulte directement des théorèmes I et L.

Théorème 2. — *Les plans qui coupent une cyclide suivant des spiriques à un ou à deux axes de symétrie coupent aussi suivant des spiriques à un ou à deux axes toutes les cyclides ayant le même centre et la même cubique principale que la proposée.*

C'est une conséquence immédiate des théorèmes XLIX et LI.

Théorème 3. — *Deux cyclides ayant même centre et même cubique principale se coupent suivant deux cycliques, dont le centre coïncide avec celui des surfaces considérées.*

Soit, en effet, a un point commun à ces deux cyclides S et S_1 ; par a passe une corde lm de la cubique principale, et le plan lmo renferme la normale en a aux surfaces S et S_1 (§ 26, théorème II); en d'autres termes, la droite menée par a perpendiculairement au plan lmo touche ces deux surfaces.

Ainsi, étant donné un point a commun à S et S_1, on sait trouver un second point a', infiniment voisin du premier, commun également aux deux surfaces; en faisant la même construction à partir du point a', on obtient de même un troisième point a'', et ainsi de suite; le lieu des points a, a', a''... est une courbe, commune à S et à S_1.

Remarquons de plus que, la droite aa' étant normale au plan lmo, les points a et a' sont (aux infiniment petits près du second ordre par rapport à aa') équidistants du point o; il en résulte que les points a, a', a'', ... sont sur une sphère de centre o. Par conséquent :

Les cyclides qui ont le même centre o et la même cubique principale qu'une cyclide donnée, et qui ont un point commun a, passent toutes par une cyclique de centre o et de rayon oa.

On en conclut que deux cyclides S et S_1 ayant même centre et même cubique principale se coupent suivant deux cycliques σ et σ_1 de centre o.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les cyclides qui ont le même centre et la même cubique principale qu'une cyclide donnée, et qui passent par deux points a et a_1 de l'espace, sont assujetties à douze conditions; elles sont donc en nombre simplement infini.

D'un autre côté, d'après les propositions précédentes, ces surfaces passent par deux cycliques fixes, σ et σ_1, de centre o, et des rayons oa et oa_1.

Inversement, les cyclides qui passent par les cycliques σ et σ_1 sont en nombre simplement infini, car on peut les regarder comme des surfaces du quatrième degré passant par l'intersection de deux cyclides S_1 et S, et, par suite, elles forment un faisceau.

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Les cyclides qui coupent une cyclide* S *suivant deux courbes sphériques concentriques à cette surface ont même centre et même cubique principale que la proposée.*

En particulier :

Les cyclides inscrites à une cyclide S, *le long d'une courbe sphérique*

concentrique à cette surface, ont même centre et même cubique principale que la proposée.

On peut donc appliquer à ces cyclides les théorèmes 1 et 2 du paragraphe actuel, et ceux qui vont suivre.

THÉORÈME 5. — *Les cyclides qui ont même centre et même cubique principale ont mêmes points de rebroussement à l'infini et mêmes plans tangents en ces points.*

En effet, deux de ces surfaces S et S_1 se coupent suivant deux cycliques σ et σ_1 de centre o.

Or on sait (théorème IX) que les cycliques qui ont pour centre le centre d'une cyclide S passent par les quatre points de rebroussement p, q, r, s de cette surface et touchent en chacun d'eux une droite située dans le plan de rebroussement.

Il en résulte immédiatement que S et S_1 ont mêmes points de rebroussement et mêmes plans tangents en ces points. C. Q. F. D.

La première partie de ce théorème avait été démontrée indirectement au § 25.

THÉORÈME 6. — *Les quadriques inscrites à des cyclides ayant même centre et même cubique principale sont en nombre doublement infini; celles de ces quadriques qui ont pour centre un point donné de la cubique principale sont homothétiques.*

Il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème, dont la première est une conséquence évidente.

On sait que les pieds des normales abaissées d'un point de l'espace sur une série de quadriques concentriques et homothétiques sont sur une même cubique ; par suite :

La cubique principale d'une cyclide est le lieu des pieds des normales abaissées du centre o de la surface sur les quadriques inscrites, et sur les quadriques concentriques et homothétiques aux précédentes.

En particulier, les pieds des quatre normales abaissées du point o sur les cônes asymptotes des quadriques inscrites sont sur la cubique principale.

Cela posé, soient S une cyclide, a un point de sa cubique principale, V la quadrique de centre a inscrite à S, H son cône asymptote.

Les pieds des normales menées de o au cône H sont à l'intersection de la cubique principale et de la sphère décrite sur oa comme diamètre. Cette sphère coupe la cubique en quatre points b, c, d, e autres que les points o et a; et le cône de sommet a qui passe par les droites ab, ac, ad, ae et qui touche le long de ces génératrices les plans perpendiculaires aux droites ob, oc, od, oe coïncide avec le cône H : ce dernier cône est donc déterminé si l'on se donne la cubique principale et le point o; par suite, les quadriques de centre a, inscrites aux cyclides ayant même centre et même cubique principale que la cyclide S, ont même cône asymptote.

C. Q. F. D.

LEMME. — *Si une cyclique plane a un point double a, sa conique principale passe par ce point.*

Car la conique principale d'une cyclique α, ayant pour centre un point o', est le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points de cette cyclique, équidistants de son centre.

En particulier, un cercle de centre o' et de rayon $o'a$ coupe α aux points a (qui compte pour deux), b et c; la conique formée par les droites ab et ac passe bien par les quatre points communs à ce cercle et à la cyclique ; comme le centre de cette conique est le point a, le lemme est démontré.

On en déduit ces théorèmes :

THÉORÈME 7. — *Le lieu des points de contact d'un plan avec des cyclides ayant même centre et même cubique principale est une hyperbole équilatère.*

Cette hyperbole est la conique principale commune à toutes les sections faites par le plan dans les cyclides de la famille considérée (théorème 1).

THÉORÈME 8. — *Si l'on mène à des cyclides ayant même centre et même cubique principale des plans tangents parallèles à un plan donné, le lieu des points de contact est une quadrique.*

Cette quadrique est la quadrique du théorème L; elle passe par la

cubique principale et la normale menée du centre o aux plans considérés.

Si cette normale coupe la cubique en un second point o', la quadrique devient le cône du second ordre de sommet o'_1 qui contient la cubique principale.

28. — De la détermination des cyclides.

1° Une cyclide est déterminée quand on connaît une sphère directrice et la déférente correspondante; car, d'après le mode de génération indiqué par MM. Moutard et Darboux, la cyclide est l'enveloppe des sphères orthogonales à la directrice et ayant leurs centres sur la déférente.

2° Une cyclide est déterminée quand on connaît une quadrique V inscrite, la cyclique de contact σ de cette quadrique et un point a de la surface.

(On voit aisément que ces données équivalent à treize conditions.)

En effet, par le point donné a, menons une tangente quelconque à la quadrique V, et soit g le point de contact. Sur cette tangente soit b un point tel que le produit $ga.gb$ soit égal à la puissance de g par rapport à la sphère qui contient la cyclique σ, le point b est sur la cyclide (théorème XVI).

On obtient donc un point b sur toute tangente à V, issue de a; le lieu de ces points b, conjugués de a dans le système V est une cyclique (§ **7**). En répétant la même construction à partir d'un des points b, et ainsi de suite, on obtient sur la cyclide autant de points que l'on veut.

3° Une cyclide est déterminée quand on connaît les cinq pôles principaux et le centre.

Remarquons d'abord que, en vertu d'un résultat rappelé au § **11**, un quelconque des cinq pôles principaux est le point d'intersection des hauteurs du tétraèdre formé par les quatre autres.

On peut donc se donner arbitrairement trois de ces points g_1, g_2, g_3; le point g_4 sera un point quelconque de la perpendiculaire élevée sur le plan $g_1g_2g_3$ au point de concours des hauteurs du triangle $g_1g_2g_3$; le point g_5 sera le point commun aux hauteurs du tétraèdre $g_1g_2g_3g_4$.

Il en résulte que donner les cinq pôles principaux d'une cyclide équi-

vaut à dix conditions; si l'on se donne en outre le centre, on aura treize conditions, c'est-à-dire le nombre nécessaire pour déterminer une cyclide.

Cette cyclide se déterminera comme il suit :

En premier lieu, les cinq sphères directrices sont connues quand les pôles principaux sont donnés; soient en effet r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 les rayons respectifs de ces sphères, qui ont pour centre les points g_1, g_2, g_3, g_4, g_5. On a, puisqu'elles sont orthogonales deux à deux,

$$r_i^2 + r_j^2 = \overline{g_i g_j}^2,$$

i et j étant différents et pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5.

De même, k étant différent de i et de j,

$$r_i^2 + r_k^2 = \overline{g_i g_k}^2,$$
$$r_k^2 + r_j^2 = \overline{g_j g_k}^2;$$

d'où l'on déduit

$$\overline{2 r_i}^2 = \overline{g_i g_j}^2 + \overline{g_i g_k}^2 - \overline{g_j g_k}^2,$$

i, j, k étant différents et pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5.

Si le centre o de la cyclide S est donné, la déférente correspondant à l'un des pôles principaux, g_1 par exemple, sera la quadrique de centre o, par rapport à laquelle le tétraèdre $g_2 g_3 g_4 g_5$ est autopolaire (§ **11**); elle est donc en général déterminée sans ambiguïté.

Il en est par suite de même pour la cyclide S. C. Q. F. D.

Remarque. — Si les pôles principaux et le centre d'une cyclide S sont donnés, la cubique principale est immédiatement connue : c'est la cubique qui passe par les six points g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 et o.

Or le point o est quelconque, les points g sont les sommets et le point d'intersection des hauteurs d'un tétraèdre; de là résulte, puisque la cubique principale d'une cyclide est triorthogonale, la proposition suivante :

Toute cubique passant par les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre est triorthogonale.

C'est la réciproque du lemme démontré au § **25**.

On pourrait démontrer cette proposition directement, sans difficulté.

29. — Des différentes formes de la cubique principale.

Nous avons vu (théorèmes XXXVI et XXXVII) que la cubique principale d'une cyclide S est le lieu des centres des quadriques qui passent par une cyclique σ, tracée sur S et ayant pour centre le centre o de la cyclide.

Ce lieu est, en général, une cubique gauche; mais cette cubique, dans certains cas que nous allons examiner, peut se décomposer en lignes d'ordre inférieur; nous verrons ensuite qu'aux différentes formes de la cubique principale correspondent diverses espèces de cyclides.

1° La cyclique σ est symétrique par rapport à un plan P.

Ce plan passe nécessairement par le centre o de σ; de plus, le cylindre qui a σ pour directrice et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan P est du second ordre, puisque chacune de ses génératrices rencontre σ en deux points.

Il y a donc un cylindre parmi les quadriques passant par σ, et, par conséquent, le lieu des centres de ces quadriques comprend l'axe δ du cylindre.

D'un autre côté, les quadriques passant par σ admettent évidemment le plan P comme plan principal; comme, d'ailleurs, les coniques communes à ces quadriques et au plan P passent par les quatre points a, b, c, d (situés sur un cercle de centre o) où ce plan coupe σ, on voit que le lieu des centres des quadriques contenant σ est une hyperbole équilatère, située dans le plan P, passant par le point o et par le point où la droite δ rencontre P.

En d'autres termes, dans le cas examiné, la cubique principale se décompose en une hyperbole équilatère et en une droite δ normale au plan P de cette courbe et la rencontrant en un point.

En ce cas, je dis que la cyclide S est symétrique par rapport au plan P.

En effet, les quadriques V, inscrites à S, sont concentriques et homothétiques (théorème XXXVI) aux quadriques passant par σ, pour lesquelles le plan P est un plan de symétrie; il en résulte que P sera égale-

ment un plan de symétrie pour les quadriques V et, par suite, pour la cyclide S, enveloppe de ces quadriques.

De plus, il y a un cylindre parmi les quadriques V, inscrites à S, puisqu'il y en a un parmi les quadriques passant par σ; on peut donc dire que le sommet d'un des cônes du second ordre inscrits à S est à l'infini, ou que la cyclide S a un pôle principal à l'infini.

La réciproque de cette proposition est vraie; en d'autres termes, si la cyclide S est symétrique par rapport à un plan P, sa cubique principale se décompose en une hyperbole équilatère, située dans le plan P, et en une droite normale à ce plan et rencontrant l'hyperbole.

En effet, le plan P passera nécessairement par le centre o de la cyclide (théorème II); et, par suite, toute sphère de centre o coupe S suivant une cyclique σ, symétrique par rapport au plan P.

2° La cyclique σ est symétrique par rapport à deux plans P et P'.

Ces plans, qui passent nécessairement par le point o, sont rectangulaires, puisque chacun d'eux est un plan principal des quadriques passant par σ.

Parmi ces quadriques figurent deux cylindres, ayant leurs génératrices respectivement normales à P et à P'; la cubique principale comprend donc les axes δ et δ' de ces deux cylindres.

D'un autre côté, les plans P et P' étant des plans principaux des quadriques passant par σ, leur intersection δ'' sera un axe de ces quadriques; il en résulte que la cubique principale se décompose en trois droites δ, δ', δ''.

D'après ce qui précède, la droite δ'' est la plus courte distance des droites δ et δ'.

En ce cas, la cyclide S est symétrique par rapport aux plans P et P'; elle a deux pôles principaux à l'infini, dans des directions respectivement normales à ces plans; enfin son centre o est évidemment sur la droite δ'', intersection de deux plans de symétrie (théorème II).

La réciproque est vraie et se démontre comme plus haut.

3° La cyclique σ est symétrique par rapport à trois plans P, P' et P''.

Ces plans passent nécessairement par le point o et forment un trièdre trirectangle, puisque chacun d'eux est un plan principal des quadriques passant par σ.

On en conclut que les axes des trois cylindres qui contiennent σ sont les intersections des plans P, P′, P″, deux à deux.

D'un autre côté, les autres quadriques passant par σ ont le point o pour centre.

Il en résulte que la cubique principale se décompose en trois droites δ, δ', δ'', issues de o et normales aux plans P, P′, P″.

En ce cas, la cyclide S est symétrique par rapport aux plans P, P′, P″; elle a trois pôles principaux à l'infini, dans des directions normales à ces plans, et le point o est un *centre,* dans la véritable acception du mot.

On peut, en s'appuyant sur ces considérations, donner une classification des surfaces cyclides; c'est cette étude que nous allons aborder dans ce qui suit.

30. — Des différentes espèces de cyclides [1].

M. Darboux a classé les cyclides, d'après la forme et les positions relatives d'une sphère directrice et de la déférente correspondante.

Cette classification correspond, comme nous allons le voir, aux différentes formes de la cubique principale.

Nous écarterons tout d'abord le cas où la déférente serait de révolution, nous réservant d'y revenir plus loin.

Soient D_1 une déférente, ayant pour centre le centre o de la cyclide S; C_1 la sphère directrice correspondante, de centre g_1.

Nous avons vu (§ 23) que les pieds des normales abaissées de g_1 sur la quadrique D_1 sont sur la cubique principale de S; cette cubique, qui passe par o et g_1, est donc déterminée quand on se donne le point g_1 et la surface D_1; et l'on est ainsi amené à distinguer les quatre cas suivants :

1° Le point g_1 n'est pas dans un des plans principaux de D_1; la cubique principale est une cubique triorthogonale quelconque;

---

[1] La classification qui suit est identique à celle de M. Darboux (*loc. cit.,* p. 154); nous y revenons pour montrer quelle est la forme de la cubique principale dans certaines cyclides remarquables, et pouvoir appliquer à ces cyclides les propositions de la théorie générale.

2° Le point g_1 est dans un des plans principaux, P, de D_1; la cubique principale se décompose évidemment en une hyperbole équilatère α, située dans le plan P, passant par o, g_1 et par les pieds des normales menées du point g_1 à la conique commune à P et à D_1; et en une droite δ normale au plan P, qui, comme on le voit aisément, rencontre l'hyperbole α. Cette droite joint les points de contact avec D_1 d'une sphère bitangente à cette quadrique et ayant g_1 pour centre;

3° Le point g_1 est sur un des axes de D_1; la cubique principale se décompose évidemment en trois droites : l'une est l'axe considéré, les deux autres sont normales à cet axe et situées respectivement dans les deux plans principaux qui le contiennent;

4° Le point g_1 est le centre de D_1; la cubique principale se décompose en trois droites, qui sont les axes de la quadrique.

On obtient ainsi une première classification des cyclides en quatre groupes; dans chaque groupe, on pourra faire varier la forme de la quadrique D_1 et le rayon de la sphère C_1, ce qui conduira à de nouvelles subdivisions.

Premier groupe : *Cyclides sans plan de symétrie.* — La cubique principale est une cubique triorthogonale quelconque.

(A). La quadrique D_1 et le rayon de la sphère C_1 sont pris arbitrairement; la cyclide est la *cyclide générale*.

(B). Le rayon de la sphère C_1 est nul; la cyclide S est alors l'enveloppe de sphères, ayant leur centre sur D_1 et passant par g_1; c'est, comme on le voit aisément, une *cyclide à point conique;* le point conique est le point g_1.

(C). La quadrique D_1 est un paraboloïde; en d'autres termes, le centre o de S est à l'infini.

La cyclide est alors une *cyclide du troisième ordre* (§ 22, *remarque*).

(D). La quadrique D_1 est un paraboloïde, C_1 a un rayon nul; c'est le cas de la *cyclide du troisième ordre à point conique.*

Si enfin la quadrique D_1 est un cône, la cyclide devient une quadrique.

En effet, observons qu'en général une sphère orthogonale à C_1, ayant son centre m sur D_1, touche S en deux points, situés sur la perpendiculaire abaissée de g_1 sur le plan tangent en m à D_1.

Si D_1 est un cône, les sphères orthogonales à C_1, ayant leur centre sur une même génératrice de D_1, toucheront S en des points situés tous sur la normale abaissée de g_1 sur le plan tangent le long de cette génératrice; cette normale est donc sur S, et la cyclide se réduit au cône de sommet g_1 supplémentaire de D_1.

Deuxième groupe : *Cyclides à un plan de symétrie.* — Le point g_1 est dans un des plans principaux de D_1; la cubique principale se décompose en une hyperbole équilatère α, située dans ce plan P, passant par o et g_1, et en une droite δ, normale à P et rencontrant α.

Cette droite coupe D_1 aux deux points de contact de cette quadrique et d'une sphère bitangente, de centre g_1.

On retrouve les subdivisions (A), (B), (C), (D), c'est-à-dire :

Les cyclides générales à plan de symétrie;

Les cyclides à plans de symétrie et à point conique;

Les cyclides à plan de symétrie du troisième ordre, avec ou sans point conique.

Il y a à distinguer un autre cas, qui ne pouvait se présenter pour les cyclides du premier groupe, celui où la sphère directrice C_1 touche D_1 en deux points a et b.

En ce cas, on voit aisément, ainsi que l'a montré M. Darboux, que les points a et b sont des points coniques de la cyclide.

La droite qui joint ces points coïncide d'ailleurs avec la droite δ de la cubique principale, ainsi qu'on l'a fait observer plus haut.

De là résultent les propositions suivantes :

Toute cyclide à deux points coniques admet un plan de symétrie.

Ce plan est perpendiculaire en son milieu à la droite des deux points coniques.

La cubique principale d'une cyclide à deux points coniques se décompose en une hyperbole équilatère α, située dans le plan de symétrie, et en une droite, qui est celle des points coniques.

Cette dernière proposition permet d'appliquer aux cyclides à deux points coniques les théorèmes des §§ 25 et suivants, relatifs aux sections planes des cyclides.

Les plans qui coupent une cyclide à deux points coniques a et b, suivant des spiriques à deux axes de symétrie, forment deux séries.

On obtient un plan quelconque de la première série en menant, par un point quelconque m de la droite ab, un plan normal à la droite qui joint ce point au centre o de la cyclide.

On obtient de même un plan quelconque de la seconde série en menant par un point m de l'hyperbole α un plan normal à la droite om.

Les plans de la première série enveloppent un cylindre parabolique, dont la section droite, dans le plan oab, est une parabole admettant le point o comme foyer et la droite ab comme tangente au sommet.

Les plans de la seconde série enveloppent un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à ab et dont la section droite, dans le plan de symétrie, est une courbe de troisième classe.

La podaire de cette courbe par rapport au centre o est l'hyperbole α.

On voit de même que les plans qui coupent une cyclide à deux points doubles a et b, suivant des spiriques, forment deux séries : la première comprend tous les plans parallèles à la droite ab; la seconde comprend les plans menés par un point quelconque m de la droite ab et un point quelconque n de l'hyperbole α, normalement au plan mon.

Ces théorèmes s'appliquent également aux cyclides à plan de symétrie; la droite ab est alors la droite δ, qui fait partie de la cubique principale.

Troisième groupe : *Cyclides à deux plans de symétrie.* — Le point g_1 est sur un des axes δ_1 de D_1; la cubique principale se décompose en trois droites, dont l'une est δ_1; les deux autres δ et δ' sont normales à δ_1 et sont situées respectivement dans les deux plans principaux P et P' de D_1, qui contiennent cet axe.

On distinguera comme plus haut :

Les cyclides générales à deux plans de symétrie;

Les cyclides à deux plans de symétrie à point conique;

Les cyclides à deux plans de symétrie du troisième ordre, avec ou sans point conique;

Les cyclides à deux plans de symétrie à deux points coniques.

Un nouveau cas se présente : c'est celui où la sphère directrice C_1 touche la déférente D_1 en deux ombilics a et b, situés dans le plan principal P; en ce cas, les surfaces C_1 et D_1 se coupent suivant quatre droites et, par suite, se touchent en quatre points a, b, c, d.

Il en résulte aisément que ces points sont des points coniques de la cyclide; cette surface est donc une *cyclide de Dupin à quatre points coniques*.

Les points c et d sont également des ombilics de D_1 et sont situés dans le plan P'. On en conclut que la cubique principale de la cyclide considérée se décompose en trois droites, savoir : la droite ab, la droite cd et la perpendiculaire commune à ces deux droites. Cette dernière est l'axe δ_1 de la quadrique D_1, sur lequel est le pôle principal g_1.

Remarquons que les points c et d sont à des distances nulles des points a et b, car les droites ac, ad, bc, bd sont des génératrices de la sphère C_1.

De ce qui précède résultent les propositions suivantes :

Les quatre points doubles a, b, c, d d'une cyclide de Dupin sont associés deux à deux, de telle sorte que les deux points a, b d'un groupe sont à des distances nulles des deux points c, d de l'autre; les droites ab et cd sont donc rectangulaires.

Une cyclide de Dupin a deux plans de symétrie.

Ces plans sont normaux en leurs milieux aux droites ab et cd, qui joignent deux points coniques associés.

Une cyclide de Dupin a un axe de symétrie.

Cet axe est l'intersection des plans de symétrie et, par suite, la perpendiculaire commune aux droites ab et cd.

Le centre o d'une cyclide de Dupin est sur l'axe de symétrie.

Les plans qui coupent une cyclide de Dupin, suivant des spiriques à deux axes de symétrie, forment trois séries :

La première comprend les plans normaux à l'axe de la surface;

La seconde, les plans tangents à un cylindre, dont la section droite est, dans le plan *oab*, une parabole, admettant le point *o* comme foyer et la droite *ab* comme tangente au sommet;

La troisième, les plans tangents à un cylindre dont la section droite est, dans le plan *ocd*, une parabole, admettant *o* comme foyer et *cd* comme tangente au sommet.

Les plans qui coupent une cyclide de Dupin, suivant des spiriques, forment de même trois séries :

La première comprend tous les plans parallèles à *ab*;

La deuxième, tous les plans parallèles à *cd*;

La troisième, les plans menés par un point quelconque *m* de *ab* et un point quelconque *n* de *cd*, normalement au plan *mon*; l'axe de la spirique correspondante est la droite *mn*, etc.

Ces théorèmes s'appliquent également à toutes les cyclides à deux plans de symétrie; les droites *ab* et *cd* sont alors les droites δ et δ', qui font partie de la cubique principale.

Quatrième groupe : *Cyclides à trois plans de symétrie.* — Le point g_1 coïncide avec le centre *o* de D_1; la cubique principale se décompose en trois droites, qui sont les trois axes de D_1. Le groupe comprend :

Les cyclides générales à trois plans de symétrie;

Les cyclides à trois plans de symétrie à point conique;

Les cyclides à trois plans de symétrie à deux points coniques.

Enfin, si l'on suppose que D_1 se réduise à une conique β de centre g_1, on voit aisément que la cyclide correspondante sera une cyclide à trois plans de symétrie, ayant deux points doubles sur la normale élevée à la conique en son centre; si la sphère directrice est bitangente à la conique β, la cyclide sera une *cyclide à trois plans de symétrie et à quatre points doubles.*

Il nous reste maintenant, pour terminer l'examen des diverses espèces de cyclides, à considérer les cas où la quadrique déférente est de révolution. Les cyclides correspondantes sont caractérisées par ce fait que *les quatre points de rebroussement à l'infini sont confondus deux à deux.*

En effet, soient D_1 la déférente, C_1 la sphère directrice correspondante de centre g_1 ; nous savons que le cône V_1, de sommet g_1, inscrit à la cyclide, est supplémentaire du cône asymptote de D_1 (*remarque II*, § **16**). Si donc la déférente est de révolution, il en est de même du cône V_1. Or les points de rebroussement de S sont à l'intersection du cercle de l'infini et du cône V_1 (théorème XI); ces points sont donc confondus deux à deux et se réduisent à deux points distincts.

Toutes les quadriques inscrites à S, passant par les points de rebroussement à l'infini, seront bitangentes au cercle de l'infini, c'est-à-dire seront des surfaces de révolution.

A l'exemple de M. Darboux, nous appellerons *cyclides cartésiennes* les cyclides qui ont pour déférente une surface de révolution.

On aura pour ces surfaces une classification analogue à celle du cas général.

1° Le centre g_1 de la sphère directrice est un point quelconque de l'espace.

Le plan P, qui passe par l'axe de révolution de la déférente D_1 et par le point g_1, est un plan principal de D_1 ; il en résulte que la cyclide est symétrique par rapport à ce plan.

La cubique principale, qui passe par les pieds des normales menées de g_1 à D_1, se décompose évidemment en une hyperbole équilatère, située dans le plan P et en une droite normale à ce plan.

Les cyclides considérées ont des propriétés semblables à celles des cyclides du deuxième groupe général.

2° Le point g_1 est, dans le plan principal de la déférente, normal à l'axe de révolution.

Les cyclides correspondantes ont des propriétés, analogues à celles des cyclides du troisième groupe général.

3° Le point g_1 est sur l'axe de révolution de la déférente.

Les cyclides correspondantes sont évidemment de révolution autour de cet axe.

4° Si la déférente est une sphère, la cyclide, comme l'a montré M. Darboux, est une surface de révolution, engendrée par la rotation des

ovales de Descartes autour de leur axe focal. Elle admet le cercle à l'infini comme ligne de rebroussement.

Nous n'entrerons pas dans des détails plus étendus au sujet des cyclides cartésiennes; leurs propriétés peuvent se déduire de celles des cyclides plus générales, ainsi que nous allons le montrer, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

31. — De l'inversion des différentes espèces de cyclides [1].

Nous avons vu (§ **21**) que toute inversion transforme une cyclide S en une autre cyclide S_1.

Toute sphère Σ bitangente à S se transforme en une sphère Σ_1 bitangente à S_1; si Σ est de rayon nul, il en sera de même de Σ_1. En d'autres termes, un foyer de S a pour réciproque un foyer de S_1; et les cinq focales de S ont pour réciproques les cinq focales de S_1. Il en résulte que les sphères directrices de S ont pour réciproques les sphères directrices de S_1.

Cela posé, remarquons que la classification des surfaces cyclides données plus haut repose en grande partie sur la nature des focales.

Ainsi, les cyclides du premier groupe général ont pour focale une cyclique sans plan de symétrie; celles du second, une cyclique à un plan de symétrie, etc., et l'on établit facilement la division suivante :

Focale.		*Cyclide.*	
Cyclique sans plan de symétrie.		Cyclide du premier groupe.	
Cyclique à un plan de symétrie...............	quelconque.	Cyclide du deuxième groupe.............	quelconque.
	réduite à deux cercles.		à deux points coniques.
Cyclique à deux plans de symétrie.............	quelconque.	Cyclide du troisième groupe.............	quelconque.
	réduite à deux cercles.		à deux points coniques.
	réduite à quatre droites		à quatre points coniques.

---

[1] La théorie de ce paragraphe est en grande partie un développement de quelques passages ou de quelques Notes de l'Ouvrage de M. Darboux.

Focale.		*Cyclide.*	
Cyclique à trois plans de symétrie (c'est-à-dire conique sphérique).		Cyclide du quatrième groupe.	
Cyclique bitangente au cercle de l'infini......	quelconque. réduite à deux cercles parallèles. réduite à deux cercles dont l'un à l'infini.	Cyclide cartésienne...	quelconque. de révolution. engendrée par la rotation des ovales de Descartes autour de leur axe focal.

La transformation des cyclides, par rayons vecteurs réciproques, se rattache donc d'une manière étroite à la transformation des cycliques.

Faisons observer que, si la sphère directrice d'une cyclide S se réduit à un plan P, S aura un pôle principal g_1 à l'infini, dans une direction normale à P; le cône inscrit de sommet g_1 sera un cylindre, dont l'axe fera partie de la cubique principale; et, par suite, S sera symétrique par rapport à un plan P_1 parallèle à P. D'un autre côté, les quatre autres sphères directrices de S coupent le plan P à angle droit, et leurs centres, c'est-à-dire les pôles principaux g_2, g_3, g_4, g_5, sont dans ce plan. Il en résulte que le plan P_1 coïncide avec le plan P. Ainsi :

Si une sphère directrice se réduit à un plan, la cyclide est symétrique par rapport à ce plan.

De là résultent les propositions suivantes :

Une cyclide a pour réciproque une cyclide à plan de symétrie, quand le pôle d'inversion est sur une sphère directrice.

Le plan de symétrie est le réciproque de la sphère directrice considérée.

Une cyclide a pour réciproque une cyclide à deux plans de symétrie, quand le pôle d'inversion est sur un des dix cercles communs à deux sphères directrices.

Une cyclide a pour réciproque une cyclide à trois plans de symétrie, quand le pôle d'inversion est un des vingt points de l'espace communs à trois sphères directrices.

Une cyclique se transforme, comme l'a montré M. Darboux, en une

cartésienne, c'est-à-dire en une cyclique bitangente au cercle de l'infini, quand le pôle d'inversion est sur une des focales de la courbe.

Or nous savons (§ 11) que les cinq focales d'une cyclide sont focales les unes des autres. Par suite :

Une cyclide a pour réciproque une cartésienne, quand le pôle d'inversion est sur une de ses focales.

Une cyclide a pour réciproque une cartésienne à deux plans de symétrie, quand le pôle d'inversion est à l'intersection d'une focale et d'une sphère directrice.

Une cyclide S, à deux points coniques, a pour focale un système de deux cercles; par suite, elle se transforme par inversion en une autre cyclide à deux points coniques, ce qui était évident *a priori*.

Soient a et b les deux points coniques de S; les deux cercles α et β, qui forment la focale, passent par ces points (§ 30).

Cherchons quelle doit être le pôle d'inversion, pour que ces cercles aient pour réciproques deux cercles parallèles.

Il faut et il suffit que les points a et b aient leurs inverses à l'infini, c'est-à-dire soient à distance nulle du pôle; par conséquent :

Une cyclide à deux points coniques a pour réciproque une cyclide de révolution, quand le pôle est sur le cercle, lieu des points à distance nulle des deux points coniques.

Si le pôle d'inversion est le centre de la sphère de rayon nul qui passe par un des cercles α et β, α par exemple, ce cercle aura pour réciproque le cercle à l'infini et, par suite :

Une cyclide à deux points coniques a pour réciproque une cyclide de révolution, engendrée par la rotation des ovales de Descartes autour de leur axe focal, quand le pôle d'inversion est le centre d'une sphère de rayon nul passant par un des cercles focaux [1].

---

[1] On démontre aisément (*voir* l'Ouvrage de M. Darboux) qu'une cyclide à deux points coniques a pour réciproque un cône du second degré quand le pôle d'inversion est un des points coniques; il en résulte, puisqu'un cône du second degré a six droites focales, situées trois à trois dans quatre plans tangents au cercle de l'infini, qu'une cyclide à deux points

Comme application de ce qui précède, on voit qu'un tore se transforme en une cyclide de révolution quand le pôle d'inversion est sur le cercle, lieu des points à distance nulle des deux points coniques. Cette cyclide a toutes ses lignes de courbure circulaires, comme le tore dont elle est la réciproque et, par suite, elle est elle-même un tore. Ainsi :

Un tore a pour réciproque un tore, quand le pôle d'inversion est sur le cercle, lieu des points à distance nulle de ses deux points coniques.

Ce cercle est réel, si le cercle méridien du tore ne coupe pas l'axe de révolution.

Une cyclide, à quatre points coniques, a pour focale un système de deux cercles de rayon nul; elle a donc pour réciproque une autre cyclide à quatre points coniques.

Il est bien connu d'ailleurs, et nous l'admettrons sans démonstration, qu'une telle cyclide est la réciproque d'un cône de révolution et qu'elle a, par suite, toutes ses lignes de courbure circulaires.

Si le pôle d'inversion est sur le cercle, lieu des points à distance nulle de deux points coniques associés, il résulte de ce qu'on a vu plus haut que la cyclide inverse de la cyclide de Dupin sera de révolution; comme elle a ses lignes de courbure circulaires, ce sera un tore (MM. Mannheim et Darboux).

---

coniques a six cercles focaux passant par ces points, et situés trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. C'est en prenant comme pôle d'inversion le centre d'une de ces quatre sphères qu'on transforme la cyclide en une surface de révolution ayant pour méridienne les ovales de Descartes.

ERRATA.

Page 152, § 9, ligne 5 à partir du bas, *lire* Théorème XX.
Page 195, ligne 10 à partir du haut, *au lieu de* S_1, *lire* S.
Page 208, ligne 13 et 16 à partir du haut, *au lieu de* « sont homothétiques », *lire* sont homothétiques et concentriques.

SUR

LES FORCES ANALYTIQUES

PAR M. LÉON LECORNU,

Ingénieur des Mines.

> Quo majores in genere difficultates parit integratio aequationum differentialium dynamicarum, eo majore cura ea examinare debemus problemata mechanica, in quibus integrationem ad quadraturas perducere contigit.
>
> (JACOBI, *Journ. de Crelle*, t. 24, 1842, p. 5.)

1. Considérons un plan en chaque point duquel s'exerce une force déterminée, contenue dans ce plan. Les composantes X, Y d'une telle force, parallèles à deux axes rectangulaires Ox, Oy, sont des fonctions des coordonnées x, y du point d'application. Posons

$$x + iy = z,$$
$$X + iY = Z.$$

Nous dirons que le système des forces X, Y est analytique si Z est une fonction analytique de la seule variable z, autrement dit si la dérivée de Z par rapport à z est indépendante du quotient $\frac{dy}{dx}$.

2. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété ait lieu sont, comme l'on sait,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial y} = -\dfrac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

La seconde équation exprime que le système de forces X, — Y admet un potentiel. Ces forces s'obtiennent en faisant tourner chacune des forces

données de 180° autour d'une parallèle à l'axe Ox passant par le point d'application, autrement dit en prenant l'*image* de chaque force par rapport à cette parallèle.

Si l'on fait pivoter les axes d'un angle α autour de l'origine, les nouvelles coordonnées x', y' ont pour valeurs

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

et les nouvelles composantes de la force sont de même

$$X' = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$Y' = Y\cos\alpha - X\sin\alpha.$$

On déduit de là, sans difficulté, la relation

$$\frac{\partial X'}{\partial y'} + \frac{\partial Y'}{\partial x'} = \cos 2\alpha\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \sin 2\alpha\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right).$$

Pour que l'on ait, quel que soit α, $\frac{\partial X'}{\partial y'} + \frac{\partial Y'}{\partial x'} = 0$, il faut donc et il suffit que les conditions

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

soient remplies; or ce sont précisément celles qui caractérisent un système analytique. On en conclut ce théorème :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un système de forces soit analytique, il faut et il suffit que ces forces, réfléchies par rapport à une même direction, donnent naissance à un système potentiel, quelle que soit la direction considérée.*

3. La grandeur R de la force et son angle d'inclinaison μ sur l'axe des x sont respectivement égaux au module et à l'argument de Z. On a donc

$$Z = Re^{i\mu}.$$

Si l'on considère le lieu des points pour lesquels μ a une valeur donnée, on peut écrire

$$dZ = e^{i\mu}\, dR = Z\frac{dR}{R}.$$

D'ailleurs

$$dZ = Z'\, dz.$$

Si donc λ désigne le logarithme népérien de R, il vient

$$dz = \frac{Z}{Z'}\, d\lambda.$$

D'autre part, si l'on considère le lieu des points pour lesquels R est constant, l'on a

$$dZ = Z'\, dz = i R e^{i\mu} d\mu = i Z d\mu,$$

d'où

$$dz = i\frac{Z}{Z'}\, d\mu.$$

Les deux valeurs de dz que nous venons d'obtenir correspondent, en chaque point, à deux déplacements perpendiculaires, et chacun de ces déplacements est égal au module de $\frac{Z}{Z'}$, multiplié par chacune des variations $d\lambda$, $d\mu$. Donc :

THÉORÈME II. — *Les courbes, lieux des points pour lesquels la force a une grandeur donnée, coupent à angle droit les courbes lieux des points pour lesquels la force a une direction donnée. Les deux familles de courbes forment un système isotherme dont les deux paramètres sont le logarithme et l'angle d'inclinaison de la force.*

4. Si l'on remplace Z par une fonction analytique de Z, le système reste évidemment analytique. En particulier, on peut multiplier Z par une constante arbitraire. En supposant que cette constante ait pour module l'unité, on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Un système de forces analytiques reste analytique quand toutes les forces tournent d'un même angle et dans le même sens, chacune autour de son point d'application.*

5. D'après les équations qui caractérisent un système analytique, on peut toujours poser, φ désignant une fonction des variables x et y,

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et l'on a alors la condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

C'est l'équation caractéristique des systèmes isothermes. D'après cela :

Théorème IV. — *Le système potentiel déduit d'un système analytique, par réflexion suivant une direction quelconque, est un système isotherme.*

6. Les propriétés géométriques des systèmes de forces, potentiels et isothermes auxquels conduit le théorème précédent, ont été étudiées sous un autre point de vue (en substituant à la notion de force celle de *vitesse thermique*), par M. Haton de la Goupillière [1], et nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer à son Mémoire. L'auteur établit l'existence d'un réseau dérivé, qui est précisément le réseau envisagé dans notre deuxième théorème. Il est d'ailleurs évident *a priori* que ce réseau, en vertu de sa définition même, doit appartenir à tous les systèmes potentiels, isothermes, déduits d'un système analytique par l'application du théorème IV. Tout réseau isotherme peut être regardé comme le réseau dérivé d'une infinité de systèmes qui sont les uns analytiques, les autres potentiels isothermes, et il y a lieu de démontrer, à cet égard, le théorème suivant :

Théorème V. — *Tout système de forces jouissant de la propriété énoncée par le théorème II est ou bien un système analytique, ou bien un système potentiel isotherme.*

Désignant, en effet, par λ le logarithme népérien de la grandeur de la

[1] *Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique,* par M. J.-N. Haton de la Goupillière (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXVIIIe Cahier).

force, par μ l'angle d'inclinaison de la force sur l'axe Ox et par k un facteur convenablement choisi, on a, pour μ constant,

$$dz = k\,d\lambda$$

et, pour λ constant, puisque le réseau (λ, μ) est isotherme par hypothèse,

$$dz = \pm ik\,d\mu;$$

par conséquent, pour un déplacement quelconque $(d\lambda, d\mu)$, il vient

$$dz = k(d\lambda \pm i\,d\mu).$$

Supposons d'abord que l'on ait le signe $+$. L'équation

$$Z = X + iY = e^{\lambda + i\mu}$$

donne, comme précédemment,

$$dZ = Z(d\lambda + i\,d\mu),$$

d'où

$$dZ = kZ\,dz.$$

$\frac{dZ}{dz}$ a donc, en chaque point, une valeur déterminée, et la force est analytique.

Supposons, en second lieu, que l'on ait le signe $-$. On considérera la force réfléchie

$$Z_1 = X - iY,$$

et l'on verra de la même manière que cette force est analytique. Le système donné, se déduisant du système des forces Z_1 par réflexion suivant la direction de l'axe Ox, est potentiel isotherme.

La proposition est donc établie.

7. Nous allons maintenant envisager un point matériel, de masse égale à l'unité, mobile dans le plan sous l'action d'un système de forces ana-

lytiques. Les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

On en déduit immédiatement, en ajoutant à la première la seconde multipliée par i,

$$(2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Soit $Z = \frac{1}{2}F'(z)$. L'équation (2) s'intègre une première fois et donne, en appelant C une constante arbitraire,

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z) + C,$$

d'où

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z) + C}}.$$

dt étant nécessairement réel et positif, on voit que dz a même argument que $\sqrt{F(z) + C}$. On peut donc dire que les trajectoires du mobile sont les enveloppes des droites $\sqrt{F(z) + C}$. La vitesse, en chaque point, est le module de $\frac{dz}{dt}$ ou, ce qui revient au même, de $\sqrt{F(z) + C}$. Si l'on pose

$$\sqrt{F(z) + C} = M + iN,$$

les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dx}{dt} = M,$$

$$\frac{dy}{dt} = N.$$

Elles renferment deux constantes arbitraires, qui sont la partie réelle et la partie imaginaire de C.

Si l'on parvient à intégrer une seconde fois l'équation (2), on introduit

une seconde constante imaginaire, équivalente à deux constantes réelles, et l'on se trouve en possession de la solution générale.

8. La valeur de la constante arbitraire C définit un état général de mouvement, que nous pouvons appeler le *régime*. Si, comme nous le supposerons toujours, $F(z)$ est une fonction monodrome de z, en chaque point du plan nous ne pouvons avoir, pour un régime déterminé, que deux valeurs de $\frac{dz}{dt}$, égales et de signes contraires. Il suffit d'ailleurs, pour fixer le régime, de se donner, en grandeur et direction, la vitesse du mobile en un point du plan. Par conséquent :

THÉORÈME VI. — *Quand la vitesse du mobile est donnée, en grandeur et direction, en un point du plan, elle est déterminée, en grandeur et direction, pour tous les autres points du plan.*

Nous supposerons, jusqu'à nouvel ordre, que le régime est donné, et nous admettrons alors que la constante C est implicitement comprise dans $F(z)$.

9. Considérons une trajectoire correspondant à une certaine relation entre z et t. Soit, sur une trajectoire infiniment voisine, $z+\varepsilon$ la position qui correspond à la même valeur de t que le point z de la première trajectoire. On a à la fois

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} \tag{3}$$

et

$$dt = \frac{dz + d\varepsilon}{\sqrt{F(z+\varepsilon)}},$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second,

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} + \frac{d\varepsilon}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon F'(z)\,dz}{[F(z)]^{\frac{3}{2}}}.$$

En comparant les deux valeurs de dt, on trouve

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{F'(z)\,dz}{F(z)};$$

d'où l'on conclut que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(z)}}$ est constant, au moins tant que l'on n'approche pas d'une position pour laquelle $F(z)$ s'annule ou devient infini.

Il suit de là que l'élément ε, qui joint les points correspondants de deux trajectoires infiniment voisines, fait un angle constant avec la direction de la vitesse, et varie proportionnellement à cette vitesse. Donc :

Théorème VII. — *Lorsqu'une infinité de mobiles se meuvent suivant un régime donné, la courbe variable, lieu de leurs positions simultanées, coupe sous un angle constant la trajectoire de chacun d'eux et se dilate ou se contracte en chaque point proportionnellement à la vitesse.*

En particulier, on peut supposer qu'à l'instant initial la courbe dont il s'agit soit orthogonale aux trajectoires; elle continue alors à couper celles-ci à angle droit. On voit, en même temps, qu'à l'inverse de ce qui se passe en Hydrodynamique plane, la section droite des *filets* dessinés par les trajectoires varie proportionnellement à la vitesse, de telle façon que le *débit* d'un même filet varie, d'un point à un autre, proportionnellement au carré de la vitesse.

10. Cela établi, considérons le réseau orthogonal formé par les trajectoires et par les courbes, lieux des positions simultanées. Soit ds l'arc de trajectoire parcouru, dans le temps dt, par un mobile placé en un point donné. Soit v la vitesse. On peut écrire

$$ds = v\,dt.$$

Si l'on remarque que le temps a, par convention, la même valeur pour tous les points de chaque courbe orthogonale aux trajectoires, on est conduit à prendre t comme paramètre servant à définir cette famille de courbes.

D'autre part, la distance ds' de deux trajectoires infiniment voisines est égale au module de ε (n° 9), et la vitesse v est égale à celui de $\sqrt{F(z)}$. Comme $\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(z)}}$ a la même valeur pour tous les points d'une même trajectoire, le module de cette expression est constant et peut être regardé comme égal à la différentielle dt' du paramètre t', qui définit la famille

des trajectoires. Il vient alors

$$\frac{ds'}{\nu} = \text{mod.}\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(z)}}\right] = dt',$$

d'où

$$ds' = \nu\, dt'.$$

Il résulte de là que les éléments ds, ds' du réseau formé par les deux familles de courbes orthogonales sont égaux, en chaque point, aux variations dt, dt' des paramètres, multipliées par un même facteur réel ν; d'où ce théorème :

THÉORÈME VIII. — *Pour un régime donné, les trajectoires constituent une famille de courbes isothermes.*

11. Si l'on désigne par ρ et ρ' les rayons de courbure, en un même point, de la trajectoire et de la courbe perpendiculaire, les formules connues sur les réseaux orthogonaux donnent, en remarquant que νdt, $\nu dt'$ sont les arcs élémentaires,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{\partial \nu}{\partial t'}}{\nu^2},$$

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{\frac{\partial \nu}{\partial t}}{\nu^2},$$

ou bien

$$\frac{\nu^2}{\rho} = -\frac{\partial \nu}{\partial t'},$$

$$\frac{\nu^2}{\rho'} = -\frac{\partial \nu}{\partial t}.$$

Par conséquent :

THÉORÈME IX. — *Les deux composantes, centripète et tangentielle, de l'accélération totale ont des expressions entièrement analogues. Chacune d'elles est égale, au signe près, au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure qui a la même direction.*

12. Les considérations qui précèdent conduisent naturellement à en-

visager le temps comme une quantité complexe, dont la partie réelle varie seule lorsque le mobile se déplace librement sous l'action des forces données, et dont la partie imaginaire varie seule lorsqu'on passe orthogonalement d'une trajectoire à une autre. Cette notion une fois admise, rien n'oblige, dans l'équation (3), à supposer que z varie de façon à donner toujours au temps des valeurs réelles. En faisant varier z et par conséquent t d'une manière quelconque, on obtient ce qu'on peut appeler des *trajectoires virtuelles*. Il est bon de noter que, lorsqu'une trajectoire est virtuelle, les vitesses réelles ne lui sont pas tangentes.

13. La direction de la vitesse en chaque point est donnée, d'après ce qu'on a vu, par l'argument de $\sqrt{F(z)}$, ou la moitié de l'argument de $F(z)$. Pour un point infiniment voisin, $z + dz$, la direction de la vitesse est donnée de même par la moitié de l'argument de $F(z) + F'(z)\,dz$. Pour que les deux directions coïncident, il faut et il suffit que $F(z)$ et $F'(z)\,dz$ aient le même argument et, par conséquent, que l'on ait

$$\arg F(z) = \arg F'(z) + \arg dz,$$

ce qui revient à dire que l'argument de la vitesse est égal à la demi-somme de ceux de la force et du déplacement. Le lieu des points pour lesquels la vitesse a une direction donnée est donc une courbe qui touche, en chacun de ses points, une droite symétrique de la force, par rapport à la vitesse. Si l'on forme l'ensemble des courbes de cette nature et qu'on prenne leurs trajectoires orthogonales, on obtient les courbes pour chacune desquelles le module de $F(z)$ et par conséquent la vitesse ont une grandeur constante. On démontre, comme au n° **3**, que les lignes d'égale vitesse et leurs trajectoires orthogonales constituent un réseau isotherme.

Considérons, en chaque point, la force R' symétrique de la force donnée R, par rapport à la vitesse. Dans le déplacement élémentaire, les travaux des deux forces ont même valeur, et chacun d'eux mesure la variation de force vive. D'ailleurs, on vient de prouver que la vitesse est la même en tous les points d'une courbe perpendiculaire aux forces R'. D'après cela, le travail des forces R', correspondant au passage d'un point d'une ligne d'égale vitesse à un point de la ligne analogue

infiniment voisine, est constant, quel que soit le point de départ sur la première courbe et, par conséquent, la grandeur de la force R′ varie, le long de cette courbe, qui lui est normale, en raison inverse de la distance à la courbe voisine. Or ceci est la condition nécessaire et suffisante pour que les forces R′ admettent un potentiel. En résumé :

Théorème X. — *Les lignes d'égale vitesse sont normales aux forces symétriques des forces données par rapport aux vitesses. Ce nouveau système de forces admet un potentiel. Les trajectoires orthogonales des lignes d'égale vitesse sont les courbes pour lesquelles la vitesse a une direction constante. Les lignes d'égale vitesse et leurs trajectoires orthogonales constituent un réseau isotherme.*

14. Nous avons admis (n° 8) que la fonction $F(z)$ est monodrome dans toute l'étendue du plan. Il en résulte que ses zéros et ses infinis sont tous d'un ordre de multiplicité entier. On peut toujours disposer de la constante arbitraire, de telle façon que tous les zéros soient simples; les racines multiples n'existent que pour des régimes particuliers.

Les points qui satisfont à l'équation $F(z) + C = o$, dans laquelle nous mettons de nouveau la constante arbitraire en évidence, sont ceux pour lesquels la vitesse devient nulle : nous les appellerons les *points d'arrêt*. Leur position varie avec le régime. Une trajectoire qui rencontre un point d'arrêt présente en ce point un rebroussement; la tangente de rebroussement est la direction de la force. Les points pour lesquels $F(z)$ et, par conséquent, $F(z) + C$ sont infinis sont des points au voisinage desquels la vitesse augmente indéfiniment; nous les appellerons les *points de projection*. Leur position est indépendante du régime.

15. Lorsqu'un circuit fermé ne renferme ni points d'arrêt, ni points de projection, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$, prise sur son contour, est égale à zéro et, par conséquent, le circuit est parcouru dans un temps nul : ce qui exclut évidemment la possibilité d'une trajectoire réelle.

Lorsqu'un circuit fermé renferme un nombre impair de points d'arrêt ou de projection (chaque point comptant pour un nombre égal à son

degré de multiplicité), un tour complet effectué suivant ce circuit change le signe de $\sqrt{F(z)}$ et renverse, par conséquent, le sens de la vitesse. Si le mobile, dans son mouvement réel, parcourait entièrement la courbe considérée, il devrait ainsi revenir à son point de départ avec une vitesse qui tendrait à l'en écarter; ce qui est absurde. L'hypothèse d'une trajectoire réelle fermée, faisant deux fois le tour d'un nombre impair de points singuliers, doit être rejetée, parce qu'elle exigerait que la trajectoire se coupât elle-même en un point, où il y aurait par suite deux directions de vitesse. On peut donc, en désignant, pour abréger, par *circuits réels* les trajectoires réelles fermées, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Les circuits réels renferment un nombre pair de points d'arrêt ou de projection.*

16. Étant donné un circuit réel, si l'on vient, sans changer le régime, à écarter infiniment peu de cette courbe le point de départ du mobile, et si l'on désigne par $z + \varepsilon$ le point de la nouvelle trajectoire qui correspond, à chaque instant, au point z de la première; il résulte du n° 9 que la quantité $\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(z)}}$ est constante. Lorsque z reprend sa valeur initiale, il en est de même de $\sqrt{F(z)}$ et par conséquent de ε. La nouvelle trajectoire est donc fermée, comme la première. On voit, en outre, que s'il n'y a aucun point singulier sur le parcours (point d'arrêt ou point de projection), ε ne peut s'annuler et, par conséquent, les deux trajectoires ne peuvent se couper. Enfin le temps employé pour revenir au point de départ est égal à l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$, prise sur le contour de l'une ou l'autre des deux trajectoires. Il est, d'ailleurs, évident que le mouvement est périodique. Ainsi donc :

THÉORÈME XII. — *Étant donné un circuit réel, si le mobile est écarté progressivement de ce circuit, sans que le régime soit modifié, il continue à décrire un circuit réel, avec un mouvement périodique, et la période conserve la même valeur, tant que le mobile ne passe pas au voisinage d'un point singulier. Les circuits successifs s'enveloppent entièrement, sans jamais se rencontrer.*

17. Imaginons que le circuit renferme deux points d'arrêt simples a et b, sans autres points singuliers. Pour obtenir la durée de la période, il suffit de calculer l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$, prise en allant rectilignement du voisinage d'un point d'arrêt au voisinage de l'autre, et en revenant au point de départ, après avoir contourné les deux points d'arrêt au moyen de cercles infiniment petits. Les points d'arrêt étant supposés correspondre à des racines simples de $F(z) = 0$, on voit sans peine que les deux intégrales circulaires sont nulles, et que le temps cherché se réduit à deux fois l'intégrale rectiligne $\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$. Cette intégrale est nécessairement réelle.

Cela suppose que le chemin rectiligne ab est tout entier à l'intérieur du circuit, ou tout au moins qu'il peut se ramener à l'intérieur par une déformation continue, effectuée sans rencontrer d'autres points singuliers. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait substituer au chemin rectiligne, pour l'intégration, un autre chemin convenablement choisi.

18. Réciproquement, à tout couple de points d'arrêt ab, tels que l'intégrale prise de l'un à l'autre suivant un certain chemin soit réelle, correspond un système de circuits réels, *pourvu toutefois que la relation* $dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$ *donne pour* z *une fonction monodrome de* t. Partons, en effet, d'un point quelconque à l'instant $t = 0$ et faisons décrire au mobile une trajectoire virtuelle fermée, qui enveloppe les deux points a, b sans contenir d'autres points singuliers.

Soit T l'intégrale prise sur le contour. A la valeur T de t correspond le point $z = z_0$ et *pas d'autre*. Si donc nous considérons la trajectoire réelle issue du point z_0, au bout du temps T, le mobile sera nécessairement revenu en ce point. On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème XIII. — *Si z est une fonction monodrome de t, à tout couple de points d'arrêt fournissant une intégrale réelle correspond un système de circuits réels.*

On sait d'ailleurs que, si z est une fonction monodrome de t, l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$ admet au plus une période réelle.

Lorsqu'il existe un système de circuits réels, correspondant à deux points d'arrêt a et b, si le mobile part du point a, il va, dans le temps $\frac{T}{2}$ égal à la moitié de la période, jusqu'au point b, où sa vitesse s'annule, revient par le même chemin en a, où sa vitesse s'annule de nouveau, et continue à osciller indéfiniment entre les points a et b.

19. Lorsque, pour un certain régime, on a obtenu un système de circuits réels, on peut modifier infiniment peu ce régime sans que la propriété cesse d'exister. Si l'on conserve en effet, dans les deux cas, le même contour d'intégration et si l'on désigne par ω la variation constante de $F(z)$ due au changement de régime, chaque élément de temps éprouve la variation $-\frac{\omega}{2}\frac{dz}{[F(z)]^{\frac{3}{2}}}$ et l'intégrale varie par suite de la quantité $-\frac{\omega}{2}\int\frac{dz}{[F(z)]^{\frac{3}{2}}}$. Or, quelle que soit la valeur de l'intégrale qui figure dans cette dernière expression, on peut choisir ω de façon que le produit soit réel, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour la permanence des circuits réels. On voit en outre qu'en dehors du cas particulier pour lequel on aurait

$$\int\frac{dz}{[F(z)]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

l'argument de ω n'est susceptible que d'une valeur. Si l'on fait varier le régime d'une manière continue, de façon à vérifier constamment la condition précédente, l'argument de ω varie aussi d'une façon continue, et l'on peut, de cette manière, faire passer par un même point du plan une infinité de trajectoires fermées correspondant à une infinité de régimes.

20. Envisageons maintenant les régimes pour lesquels deux points d'arrêt viennent en coïncidence. L'équation $F(z) = 0$ possède alors une racine double qui vérifie l'équation dérivée $F'(z) = 0$. La force

$$Z = \tfrac{1}{2}F'(z)$$

est nulle au point correspondant, qui mérite par conséquent le nom de *point d'équilibre*. Un point d'arrêt est donc double s'il se trouve placé en une position d'équilibre. Il est aisé de déterminer les régimes jouissant de cette propriété : il suffit de choisir la constante C de manière que l'équation

$$F(z) + C = 0$$

ait une racine commune avec

$$F'(z) = 0.$$

Lorsque le mobile est placé, sans vitesse initiale, en un point d'équilibre, il y reste indéfiniment. Pour une position infiniment voisine, on peut, si le régime n'a pas changé, écrire, en appelant a l'affixe du point d'équilibre et négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$F(z) = \frac{(z-a)^2}{2} F''(a);$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{2}{F''(a)}} \frac{dz}{z-a}.$$

L'intégrale prise sur un cercle infiniment petit entourant le point a est égale à $\sqrt{\frac{2}{F''(a)}} \times 2\pi i$. Elle n'est réelle que dans le cas où $F''(a)$ est réel et négatif : c'est donc à cette condition que le point a est entouré par des circuits réels.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître la nature de ces circuits. Si l'on pose $\sqrt{\frac{F''(a)}{2}} = Ai$, A désignant une constante réelle, et si l'on prend comme nouvelle variable la quantité $\zeta = z - a$, de manière à transporter l'origine au point a, il vient

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = A i\, dt;$$

d'où, en intégrant,

$$\zeta = \zeta_0 (\cos At + i \sin At).$$

Cette équation représente un cercle de centre a passant par la position

initiale ζ_0 et parcouru avec un mouvement uniforme. On voit en outre que, pour la conservation du régime, la vitesse initiale doit être perpendiculaire au rayon et égale au rayon multiplié par A. Ainsi :

THÉORÈME XIV. — *Lorsque le régime est choisi de telle façon qu'il y ait arrêt en un point d'équilibre, ce point n'est généralement pas entouré par des circuits réels. Dans le cas où il existe de pareils circuits, ceux-ci affectent, dans le voisinage du point d'équilibre, la forme de cercles infiniment petits qui ont leur centre au point d'équilibre et sont parcourus avec une vitesse constante, proportionnelle au rayon.*

Il va sans dire que ce théorème n'est vrai que dans les limites de l'approximation dont nous nous sommes contenté.

21. Les conditions du théorème précédent étant remplies, on peut, d'après ce qui a été vu (nº **19**), modifier infiniment peu le régime sans que les trajectoires fermées cessent d'exister. Pour calculer, dans le cas présent, la variation de régime ω, il faut connaître l'intégrale

$$\int \frac{dz}{[F(z)]^{\frac{3}{2}}}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\frac{F''(a)}{2} = A, \quad \frac{F'''(a)}{6} = B, \quad \frac{F^{\text{IV}}(a)}{24} = C$$

et conservant l'origine au point a, on peut écrire

$$F(\zeta) = A\zeta^2 + B\zeta^3 + C\zeta^4 + \ldots;$$

on a alors

$$\int \frac{d\zeta}{[F(\zeta)]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\zeta}{\zeta^3(A + B\zeta + C\zeta^2 + \ldots)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \int \frac{d\zeta}{A^{\frac{3}{2}}\zeta^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{B}{A}\zeta + \left(\frac{15}{8}\frac{B^2}{A^2} - \frac{3}{2}\frac{C}{A}\right)\zeta^2 + \ldots\right].$$

L'intégrale, prise sur un cercle infiniment petit autour du point d'équi-

libre, se réduit à

$$\frac{15B^2 - 12AC}{4A^{\frac{7}{2}}} \times i\pi.$$

La constante ω doit être choisie de telle façon qu'en la multipliant par cette quantité on obtienne un produit réel.

22. Il est intéressant de rechercher dans quels cas l'équilibre est stable, autrement dit dans quels cas le mobile abandonné, avec une vitesse initiale infiniment petite, dans une position quelconque infiniment rapprochée d'un point d'équilibre, ne s'écarte jamais de ce point d'une quantité finie. Soit toujours a le point d'équilibre, et soit $a + \alpha$ la position initiale. Soit $z = a + \zeta$ la position du mobile au bout du temps t. Si l'équilibre est stable, ζ est infiniment petit comme α, et l'on a, en négligeant ζ^3,

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z) = F(a) + \frac{\zeta^2}{2} F''(a).$$

D'ailleurs, si ε désigne la quantité imaginaire, infiniment petite, qui, à l'instant initial, représente la vitesse en grandeur et en direction, on a également

$$\varepsilon^2 = F(a) + \frac{\alpha^2}{2} F''(a).$$

Donc

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \varepsilon^2 + \frac{\zeta^2 - \alpha^2}{2} F''(a)$$

et par suite

$$dt = \sqrt{\frac{2}{F''(a)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \alpha^2 + \frac{2\varepsilon^2}{F''(a)}}}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{F''(a)}{2}} = p + iq,$$

$$\beta^2 = \alpha^2 - \frac{2\varepsilon^2}{F''(a)},$$

et si l'on désigne par $e^{\lambda + i\mu}$ une constante arbitraire, la valeur générale de ζ

est

$$\zeta = \frac{\beta}{2}\left(e^{(p+iq)t+\lambda+i\mu} + e^{-(p+iq)t-(\lambda+i\mu)}\right),$$

expression dans laquelle λ et μ sont déterminés par la condition que, pour $t=0$, il vienne $\zeta = \alpha$. Le carré du module de ζ a pour expression

$$\tfrac{1}{4}\,\mathrm{mod}\,(\beta^2)\left[e^{(pt+\lambda)} + e^{-2(pt+\lambda)} + 2\cos 2(qt+\mu)\right].$$

Ce module ne peut rester infiniment petit, quel que soit t, que si $p=0$; d'où

$$F''(a) = -2q^2.$$

La condition pour que l'équilibre soit stable au point a est, d'après cela, que $F''(a)$ soit réel et négatif; c'est la condition déjà trouvée pour que le point d'équilibre donne naissance à des trajectoires fermées.

Lorsqu'il en est ainsi, on peut poser

$$e^{\lambda} + e^{-\lambda} = 2A, \quad e^{\lambda} - e^{-\lambda} = 2B,$$

A et B étant deux constantes réelles pour lesquelles $A^2 - B^2 = 1$, et la valeur de ζ devient

$$\zeta = \beta[A\cos(qt+\mu) + iB\sin(qt+\mu)].$$

La trajectoire se réduit, d'après cela, à une ellipse infiniment petite, ayant son centre au point d'équilibre. Toutefois, le résultat n'est exact qu'au degré d'approximation adopté, et la courbe ne se ferme rigoureusement que pour les régimes déterminés au n° **21**. Quoi qu'il en soit, on peut regarder comme démontrée la proposition suivante :

Théorème XV. — *Les points d'équilibre stable sont ceux qui peuvent être entourés de circuits réels infiniment petits. Autour de chacun de ces points, les circuits de ce genre tendent, quel que soit le régime, à prendre la forme d'ellipses infiniment petites, dont le point d'équilibre est le centre.*

Si le point d'arrêt se rapprochait d'une racine triple de $F(z)=0$, $F''(a)$ tendrait vers zéro, et par conséquent la période trouvée au n° **20** augmenterait indéfiniment.

23. Les points de projection correspondant à des infinis simples de $F(z)$ se comportent, au point de vue de l'existence des circuits réels, comme des points d'arrêt isolés ; car autour de chacun d'eux, comme autour d'un point d'arrêt, l'intégrale est nulle et il y a changement de signe du radical. Un point de projection peut être associé à un point d'arrêt pour former un couple de points singuliers donnant naissance à un système de trajectoires réelles fermées.

Les points de projection qui correspondent à des infinis d'ordre impair de $F(z)$ jouissent des mêmes propriétés ; s'ils correspondent à des infinis pairs, ils n'influent ni sur la valeur de l'intégrale, ni sur le signe du radical.

24. Nous avons considéré, jusqu'à présent, des systèmes de forces analytiques parfaitement définis. Il convient maintenant d'admettre que toutes les forces sont susceptibles de tourner simultanément d'un même angle, et dans le même sens, chacune autour de son point d'application : c'est la transformation déjà envisagée dans le théorème III. Un tel système de forces peut être appelé *indéfini*. On passe d'un système indéfini à un système défini en donnant une valeur déterminée au coefficient variable (de module égal à l'unité) qui doit être regardé comme multipliant la fonction $F(z)$. Nous dirons que ce coefficient est la *caractéristique* du système.

L'état dynamique du plan dépend ainsi de deux coefficients, qui sont la *caractéristique* du système de forces et la constante servant à spécifier le *régime*.

Lorsqu'on fait varier la caractéristique sans changer le régime, on ne déplace ni les points d'équilibre, ni les points de projection, ni les points d'arrêt. La vitesse tourne en chaque point d'un angle égal à la moitié de celui dont tournent les forces.

THÉORÈME XVI. — *Deux trajectoires réelles correspondant, pour un même régime, à deux caractéristiques différentes, ne peuvent se couper en plus d'un point.*

Ce théorème ne reste vrai qu'autant que les trajectoires ne comprennent entre elles aucun point singulier. Dans ces conditions, la démonstration est facile ; car, s'il y avait deux points d'intersection z_0, z_1, le temps em-

ployé pour aller de l'un à l'autre serait $\int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\lambda F(z)}}$ pour la caractéristique λ et $\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\mu F(z)}}$ pour la caractéristique μ, les deux intégrales étant prises indifféremment sur l'une ou l'autre des deux trajectoires. Leur rapport serait $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$, quantité imaginaire, et par conséquent elles ne pourraient être toutes les deux réelles, ce qui est contraire à l'hypothèse. On voit en même temps que la caractéristique λ peut toujours être choisie de façon à rendre l'intégrale réelle ; ce qui permet, si z est fonction monodrome de t, de trouver un système de forces dans lequel deux points donnés z_0, z_1 se trouvent sur une même trajectoire réelle.

Corollaire. — *Par un point donné et pour un régime donné, ne peuvent passer deux circuits réels ne comprenant entre eux aucun point singulier.* Car deux courbes fermées qui passent par un même point ont au moins un second point de rencontre.

25. Étant donné, pour un système de forces indéfini, un certain état de régime, soient A, B, C, D, ... les points d'arrêt ou de projection. Pour un couple AB et une caractéristique λ, l'intégrale $\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{\lambda F(z)}}$ a, en général, une série de valeurs différentes, correspondant à une série de chemins qui occupent des situations différentes par rapport aux points singuliers C, D, ...

Quel que soit le chemin considéré et quelle que soit la valeur de l'intégrale prise sur ce chemin, on peut évidemment choisir la caractéristique de telle façon que l'intégrale soit réelle. Il existe toujours une caractéristique, et une seule, satisfaisant à cette condition. A cette caractéristique correspond nécessairement, pourvu que la fonction $z = \varphi(t)$ soit monodrome, un système de circuits réels enveloppant le couple AB. En supposant, comme cas particulier, que deux points d'arrêt A et B viennent se confondre en un point d'équilibre a, on voit qu'on peut toujours choisir la caractéristique de telle façon que l'équilibre soit stable : il suffit de prendre pour λ la valeur qui rend le produit $\lambda F''(a)$ réel et négatif.

Ainsi donc :

Théorème XVII. — *La caractéristique d'un système de forces indéfini peut être choisie de telle façon que deux points d'arrêt donnés correspondent à un système de circuits réels, ou qu'un point d'équilibre donné soit un point d'équilibre stable.*

Les trajectoires réelles se réduisent, au voisinage d'un point d'équilibre stable et d'arrêt, en vertu du théorème XIV, à des circonférences infiniment petites ayant ce point pour centre. Si l'on change la caractéristique sans changer le régime, l'équilibre devient instable, et les trajectoires, étant assujetties à couper sous un angle constant ces mêmes circonférences, deviennent, au voisinage du point d'équilibre, des spirales logarithmiques, toutes identiques entre elles.

26. Si, au lieu du facteur imaginaire que nous avons appelé la *caractéristique,* on prenait, pour multiplier $F(z)$, une quantité réelle et positive, cette multiplication, qui reviendrait à changer la masse du mobile sans modifier le système de forces, n'influerait aucunement sur la forme des trajectoires, car elle n'altérerait ni la direction de la vitesse, ni les conditions de réalité de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$. Pour un même régime, autrement dit pour une situation donnée des points d'arrêt, la vitesse en chaque point du plan varierait en raison inverse de la racine carrée de la masse, et la force vive resterait invariable. Nous avons donc ce dernier théorème :

Théorème XVIII. — *Pour un régime donné, la forme des trajectoires et la force vive en chaque point du plan sont indépendantes de la masse du mobile.*

NOTE

SUR

LA COURBURE DE L'HERPOLHODIE

Par M. H. RESAL,

Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique.

1. *Exposé.* — On sait que Poinsot a donné le nom d'*herpolhodie* au lieu géométrique des points de contact de l'ellipsoïde d'inertie, roulant sur un plan fixe perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

Sans s'arrêter à discuter l'équation différentielle de la courbe à laquelle il arrive, l'illustre géomètre estime que cette courbe est ondulée et que, par suite, elle a des points d'inflexion.

M. le comte de Sparre, par une brillante analyse fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques (¹), a dernièrement démontré que l'herpolhodie n'a ni point d'inflexion ni point de rebroussement. La courbe offre ainsi une grande analogie avec celle que décrit la projection horizontale de la masse terminale du pendule conique (²).

(¹) *Sur le mouvement autour d'un point fixe et sur le pendule conique* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* 1885).

(²) L'expression d'*herpolhodie* (route serpentante du pôle), résultant d'une suppression et d'une interposition de lettres, devrait alors, il nous semble, être remplacée par une autre exprimant que les points maxima et minima de la courbe se déplacent dans un même sens. L'expression *pologyrhodie,* qui serait conforme à notre idée, laissant à désirer au point de vue de l'euphonie, pourrait être remplacée par celle de *gyropolhodie*.

Dans cette Note nous nous proposons, en prenant pour point de départ l'équation différentielle de Poinsot, de trouver l'expression du rayon de courbure de l'herpolhodie, pour en déduire ensuite le théorème de M. de Sparre.

2. *Notations et formules diverses.* — Soient

$a > b > c$ les trois demi-axes de l'ellipsoïde ;

$h \begin{smallmatrix} < a \\ > c \end{smallmatrix}$ la distance OI du centre O au plan fixe (P).

En exprimant que le plus grand moment d'inertie $\frac{1}{c^2}$ est plus petit que la somme des deux autres, on trouve

$$c^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \tag{0}$$

et, *a fortiori*,

$$h^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \qquad \frac{a^2 b^2}{h^2} < a^2 + b^2. \tag{1}$$

Soient x, y, z les coordonnées du pôle de rotation m ; r le rayon vecteur Om.

Des équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2}, \\ &x^2 + y^2 + z = r^2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

on déduit

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \mathrm{P}(r^2 - \alpha^2), \\ y^2 &= \mathrm{Q}(r^2 - \beta^2), \\ z^2 &= \mathrm{R}(r^2 - \gamma^2), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} > 0, \\ \mathrm{Q} &= \frac{b^4}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} < 0, \\ \mathrm{R} &= \frac{c^4}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} > 0 ; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha^2 = b^2 + c^2 - \dfrac{b^2c^2}{h^2} > 0 \\ \beta^2 = c^2 + a^2 - \dfrac{c^2a^2}{h^2} > 0 \end{cases} \text{ puisque } h > c,$$
$$\gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{h^2} > 0, \text{ en vertu de la seconde des inégalités (1).}$$

On déduit des formules (5)

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = (b^2 - a^2)\left(1 - \dfrac{c^2}{h^2}\right) < 0, \\ \beta^2 - \gamma^2 = (c^2 - b^2)\left(1 - \dfrac{a^2}{h^2}\right) > 0, \\ \gamma^2 - \alpha^2 = (a^2 - c^2)\left(1 - \dfrac{b^2}{h^2}\right) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} h > b \\ h < b \end{matrix}. \end{cases}$$

Ainsi l'on a

$$(7)\quad \begin{cases} \beta > \gamma > \alpha & \text{si} \quad h > b, \\ \beta > \alpha > \gamma & \phantom{\text{si}} \quad h < b. \end{cases}$$

En se reportant aux formules (4) et (5), on voit que y^2 ne sera positif qu'autant que $r < \beta$; que x^2, z^2 ne seront positifs que pour des valeurs de r au moins égales à la plus grande des quantités α et γ. On a ainsi

$$\begin{aligned} & r \leqq \beta, \\ & r \geqq \gamma \quad \text{si} \quad h > b, \\ & r \geqq \alpha \quad \phantom{\text{si}} \quad h < b. \end{aligned}$$

On déduit des formules (5) les relations suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} h^2 - \alpha^2 = \dfrac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2} = m \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} h > b \\ h < b \end{matrix}, \\ h^2 - \beta^2 = \dfrac{(h^2 - c^2)(h^2 - a^2)}{h^2} = n < 0, \\ h^2 - \gamma^2 = \dfrac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2} = p \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} h > b \\ h < b \end{matrix}, \end{cases}$$

En posant

$$(9)\qquad \Delta = (h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2),$$

on voit que

$$(10)\qquad \sqrt{mnp} = \sqrt{(h^2-\alpha^2)(h^2-\beta^2)(h^2-\gamma^2)} = \mp\frac{\Delta}{h^2} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} h>b \\ h<b \end{matrix}.$$

La valeur de la fonction

$$(11)\qquad \mathrm{T} = (r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)$$

sera, d'après ce qui précède, constamment négative pour les valeurs admissibles de r.

3. *De la polhodie.* — Si ds est l'élément d'arc de la *polhodie* (lieu géométrique du pôle de rotation sur l'ellipsoïde d'inertie), on a, en vertu des équations (3) et (4),

$$(12)\quad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{r^2 dr^2}{\mathrm{T}}\big\{ r^4 - r^2[\mathrm{P}(\beta^2+\gamma^2)+\mathrm{Q}(\gamma^2+\alpha^2)+\mathrm{R}(\alpha^2+\beta^2)] \\ \qquad\qquad + \mathrm{P}\gamma^2\alpha^2 + \mathrm{Q}\gamma^2\alpha^2 + \mathrm{R}\alpha^2\beta^2 \big\} \end{cases}$$ (¹);

mais on a, en vertu des formules (3), (4), (5),

$$(a)\qquad \mathrm{P}(\beta^2+\gamma^2)+\mathrm{Q}(\gamma^2+\alpha^2)+\mathrm{R}(\alpha^2+\beta^2) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

$$(b)\qquad \mathrm{Q}(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2) = \frac{b^4(h^2-b^2)(h^2-\beta^2)^2}{h^4(h^2-\alpha^2)(h^2-\gamma^2)},$$

$$(c)\qquad b^2 = h^2 \mp h\sqrt{\frac{(h^2-\alpha^2)(h^2-\gamma^2)}{h^2-\beta^2}} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} h>b \\ h<b \end{matrix}.$$

Si l'on ne perd pas de vue que $(h^2-\beta^2)<0$ (²) on trouve, en ayant égard à la formule (10), que l'expression (b) se réduit à

$$2h^4 - 2\frac{\Delta}{h^2} - h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \alpha^2\gamma^2,$$

(¹) *Voir* pour cette formule et les suivantes, jusqu'à nouvel ordre, notre Mémoire intitulé : *Développements sur la théorie de la rotation des corps solides,* inséré au LIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 23 à 26), en remplaçant toutefois Δ par — T.

(²) Dans le Mémoire précité nous n'avions pas fait cette observation, inadvertance qui nous a été signalée par M. Ph. Gilbert. De sorte que tous les termes en Γ doivent être changés de signes dans les formules subséquentes.

et l'on a par suite

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{r^2 dr^2}{T}\Big[r^4 - r^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2h^4 \\ - 2\frac{\Delta}{h^2} + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2\Big]. \end{aligned} \right.$$

4. *Équation différentielle de l'herpolhodie.* — Soit φ l'angle formé par le rayon vecteur $\rho = \mathrm{I}m$ avec un axe fixe $\mathrm{I}x$ tracé dans le plan tangent.

On a

$$\rho^2 = r^2 - h^2,$$

$$d\rho^2 = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - h^2}.$$

et

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - h^2} + \rho^2 d\varphi^2;$$

d'où, en égalant cette valeur à l'expression (13) et réduisant,

$$\begin{aligned} \rho^2 d\varphi^2 = -\frac{r^2 dr^2}{(r^2-h^2)\mathrm{T}}\Big[h^2 r^4 - 2\left(h^3 - \frac{\Delta}{h^3}\right)hr^2 \\ + (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)h^2 \\ - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)h^4 + 2h^6 - 2\Delta - \alpha^2\beta^2\gamma^2\Big]; \end{aligned}$$

mais, en ayant égard à la valeur (10) de Δ^2 exprimée en fonction de α, β, γ, on reconnaît que le terme constant, qui entre dans le dernier facteur de l'expression précédente, n'est autre chose que $\left(h^3 + \frac{\Delta}{h^3}\right)^2$ et l'on a, par suite,

$$(14)\qquad d\varphi = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{-\mathrm{T}}}\left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right).$$

Telle est la formule de Poinsot, à laquelle nous sommes arrivé par une méthode différente de la sienne, mais qui nous paraît plus simple.

Nous conviendrons, dans ce qui suit, de faire passer l'axe $\mathrm{I}x$ par un point minimum : $d\rho$ sera ainsi positif entre ce point et le point maximum suivant, étendue qu'il nous suffira de considérer.

Nous avons deux cas à étudier :

1° $h > b$. — Ici Δ est négatif, mais en exprimant que le minimum $h(\gamma^2 - h^2)$ de $h\rho^2$ est supérieur à $-\frac{\Delta}{h^3}$ ou que

$$h^2(\gamma^2 - h^2)^2 > (h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2),$$
$$h^2(\gamma^2 - \alpha^2) > \beta^2(h^2 - \alpha^2)$$

ou, en vertu des valeurs (5), (6), (8),

$$h^2 > \frac{c^2}{2},$$

ce qui a lieu. Il faudra donc choisir le signe supérieur du dénominateur de l'expression (14).

2° $h < b$. — Comme Δ est positif, il faudra prendre également le signe supérieur du même dénominateur.

On aura donc sans restriction

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-T}}\left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right). \tag{15}$$

5. *Rayon de courbure de l'herpolhodie.* — Soient U l'angle formé avec le rayon vecteur ρ; R le rayon de courbure. Nous avons

$$T = (\rho^2 + m)(\rho^2 + n)(\rho^2 + p), \tag{16}$$

$$\operatorname{tang} U = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{-T}}\left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right) \tag{17}$$

et

$$\frac{1}{R \cos U} = \frac{d\varphi + dU}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\operatorname{tang} U + \cos^2 U \frac{d \operatorname{tang} U}{d\rho}$$

ou

$$\frac{1}{R \cos^3 R} = \frac{1}{\rho}\operatorname{tang} U(1 + \operatorname{tang}^2 U) + \frac{d \operatorname{tang} U}{d\rho}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{d(-T)^{-\frac{1}{2}}}{d\rho} = \frac{1}{2}(-T)^{-\frac{3}{2}}\frac{dT}{d\rho} = \rho(-T)^{-\frac{3}{2}}[(\rho^2 + m)(\rho^2 + n)$$
$$+ (\rho^2 + n)(\rho^2 + p) + (\rho^2 + p)(\rho^2 + m)],$$

l'équation (17) donne

$$\frac{d\tang U}{d\rho} = \frac{\rho}{-(T)^{\frac{3}{2}}}\left\{-2hT + \left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right)\left[(\rho^2+m)(\rho^2+n) + (\rho^2+n)(\rho^2+p)\right.\right.$$
$$\left.\left. + (\rho^2+p)(\rho^2+m)\right]\right\}.$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{\rho(-T)^{\frac{3}{2}}}{R\cos^3 U} = -T\left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right) + \left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right)^3$$
$$+ \rho^2\left\{-2hT + \left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right)\left[(\rho^2+m)(\rho^2+p)\right.\right.$$
$$\left.\left. + (\rho^2+n)(\rho^2+p) + (\rho^2+p)(\rho^2+m)\right]\right\}$$
$$= \left(h\rho^2 + \frac{h^3}{\Delta}\right)\left\{-(\rho^2+m)(\rho^2+n)(\rho^2+p)\right.$$
$$+ \rho^2\left[(\rho^2+m)(\rho^2+n)\right.$$
$$+ (\rho^2+n)(\rho^2+p)$$
$$\left. + (\rho^2+p)(\rho^2+m)\right]$$
$$\left. + \left(h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}\right)^2\right\} - 2h\rho^2 T;$$

d'où, en développant et ayant égard à la formule (10) qui donne mnp en fonction de Δ, puis divisant par ρ^4,

$$\frac{(-T)^{\frac{3}{2}}}{\rho^3 R\cos^3 U} = -h\rho^2\left(m+n+p-h^2-\frac{2\Delta}{h^4}\right)$$
$$+ \frac{\Delta}{h}\left(3 + \frac{m+n+p}{h^2}\right) - 2h(mn+np+pm).$$

Mais on a

$$m+n+p = 3h^2 - 2(a^2+b^2+c^2) + \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{h^2},$$
$$mn+np+pm = \frac{\Delta}{h^4}(3h^2-a^2-b^2-c^2),$$

par suite

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{h^5(-\mathrm{T})^{\frac{3}{2}}}{\rho^3 \mathrm{R}\cos^3\mathrm{U}} &= h^2\rho^2[-2a^2b^2c^2 + h^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)] \\ &\quad + \Delta(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &= -h^2\rho^2[a^2b^2(c^2-h^2)+c^2a^2(b^2-h^2)-b^2c^2h^2] \\ &\quad + \Delta(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \end{aligned}\right.$$

L'expression

$$(19)\qquad \frac{(-\mathrm{T})^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\mathrm{U}} = \left[-\mathrm{T}+\left(h\rho^2+\frac{\Delta}{h^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

ne peut pas s'annuler, puisqu'on a vu plus haut que $h\rho^2 + \frac{\Delta}{h^3}$ reste positif, quelle que soit la valeur admissible de ρ; donc R ne peut pas être nul et la courbe n'a pas, par suite, des points de rebroussement.

La même expression ne pouvant pas devenir infinie, les points d'inflexion, s'il en existe, seront obtenus en égalant à zéro le second membre de l'équation (18).

Nous avons maintenant deux cas à distinguer :

Premier cas : $h > b$. — Le coefficient de $-h\rho^2$, dans l'équation précitée, et Δ étant négatifs, il y a une valeur positive de ρ^2,

$$(20)\qquad \rho^2 = \frac{(a^2-h^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{h^2[a^2b^2(h^2-c^2)+c^2a^2(h^2-b^2)+b^2c^2h^2]},$$

qui annule le second membre de l'équation précitée.

Mais, en exprimant que cette valeur est inférieure à son minimum

$$\gamma^2 - h^2 = \frac{(a^2-h^2)(h^2-b^2)}{h^2},$$

on trouve

$$c^2 > \frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

ce qui est la condition (o) que doit remplir l'ellipsoïde d'inertie.

Donc la valeur ci-dessus de ρ^2 n'est pas admissible et l'herpolhodie n'a pas de point d'inflexion.

Second cas : $h < b$. — Si $h^2 \geqq \dfrac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, il n'y aura pas non plus de points d'inflexion, puisque Δ est positif et que le coefficient de $-h\rho^2$ dans l'équation (18) est négatif ou nul.

Supposons maintenant $h^2 < \dfrac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, la valeur (20), mise sous la forme

$$\rho^2 = \frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)(h^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{h[2a^2b^2c^2-h^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]},$$

ne peut pas être supérieure au minimum

$$\alpha^2 - h^2 = \frac{(b^2-h^2)(h^2-c^2)}{h^2}$$

de ρ^2 et est par suite inadmissible, car autrement on trouverait

$$-c^2b^2 > a^2(b^2-c^2).$$

Ainsi donc l'herpolhodie n'a ni points de rebroussement ni points d'inflexion.

6. *Formules diverses* (¹). — On déduit de l'équation (15), pour l'élément d'arc commun à la polhodie et à l'herpolhodie,

$$\begin{aligned} ds &= \frac{d\rho}{\sqrt{-T}}\sqrt{\left(h\rho^2+\frac{\Delta}{h^3}\right)^2 - T} \\ &= \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-T}}\sqrt{-\rho^4-\rho^2(m+n+p-h^2)-(mn+np+pm)+\frac{2\Delta}{h^2}} \end{aligned}$$

et, en ayant égard à ce qui précède,

$$ds = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-T}}\sqrt{-\rho^4+\rho^2\left[2(a^2+b^2+c^2)-2h^2-\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{h^2}\right]+\frac{\Delta}{h^2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{h^2}-1\right)}. \tag{21}$$

Proposons-nous maintenant de déterminer l'expression de l'élément du temps.

(¹) Il s'agit ici de quelques formules que nous avons indiquées dans le Mémoire dont il a été question dans les notes précédentes, et auxquelles nous n'avons pas donné une forme suffisamment explicite.

Soient N, P, Q les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la rotation instantanée ω; k le moment résultant des quantités de mouvement.

Nous avons ces formules de Poinsot,

$$\omega = r\sqrt{\frac{N^2}{a^2} + \frac{P^2}{b^2} + \frac{Q^2}{c^2}},$$

$$h = \frac{\sqrt{\frac{N^2}{a^2} + \frac{P^2}{b^2} + \frac{Q^2}{c^2}}}{k};$$

d'où

$$(a) \qquad \omega^2 = k^2 h^2 r^2.$$

En ajoutant entre elles les équations

$$\frac{1}{a^2}\frac{dN}{dt} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)PQ,$$

$$\frac{1}{b^2}\frac{dP}{dt} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)QN,$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)NP,$$

après les avoir respectivement multipliées par N, P, Q, on trouve

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{2}{a^2b^2c^2}\left[a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)\right]NPQ$$

$$= \frac{2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{a^2b^2c^2}NPQ;$$

d'où, en ayant égard à la valeur (a),

$$rdr = \frac{1}{k^2h^2a^2b^2c^2}(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)NPQ\,dt.$$

Mais on a

$$N = \omega\frac{x}{r} = khx, \quad P = khy, \quad Q = khz,$$

par suite

$$rdr = \frac{kh}{a^2b^2c^2}(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)\,xyz\,dt$$

ou, en vertu des formules (3) et (4),

$$r\,dr = \frac{ka(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\sqrt{\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{PQR}}\,dt = kh\sqrt{-\mathrm{T}}\,dt$$

et enfin

$$dt = \frac{\rho\,d\rho}{kh\sqrt{-\mathrm{T}}}. \tag{22}$$

On déduira des formules (21) et (22) la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du pôle de rotation.

FIN DU LVe CAHIER.

TABLE DES MATIÈRES.

10905 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

MÉMOIRE SUR LES OSCILLATIONS À I

$\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{10}{100}$ *Échelle des vitesses, 10 m m par tour.*

$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$ *Échelle des ouvertures de vanne, grandeur naturelle.*

$\frac{A}{\Upsilon} = \frac{8}{10}$ *Échelle des temps, 6 m m 25 par minute.*

$\Omega = 50^t$ *Écart initial de la vanne, 85 m m.*

$\mathcal{R} = 200^m/m$

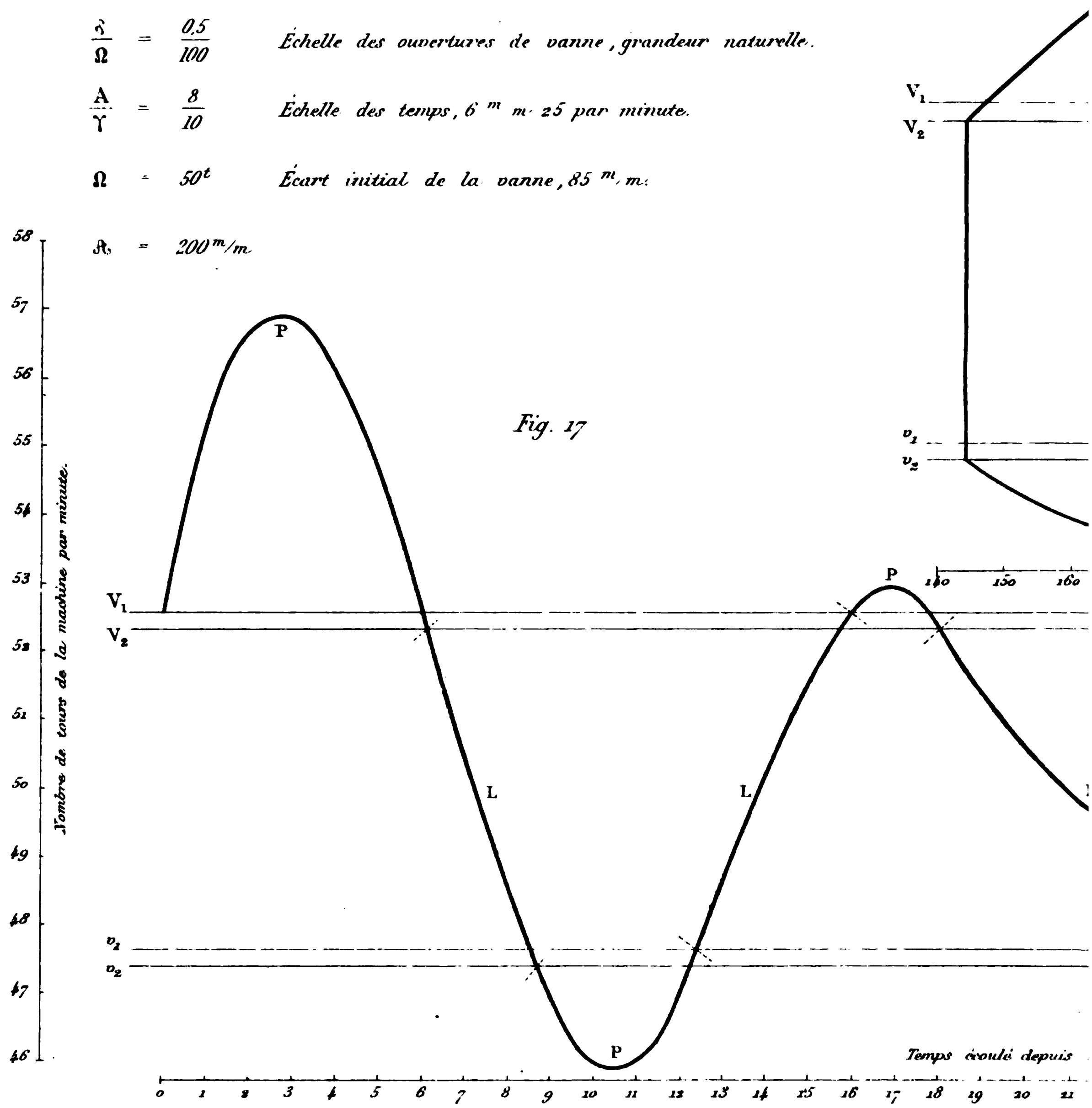
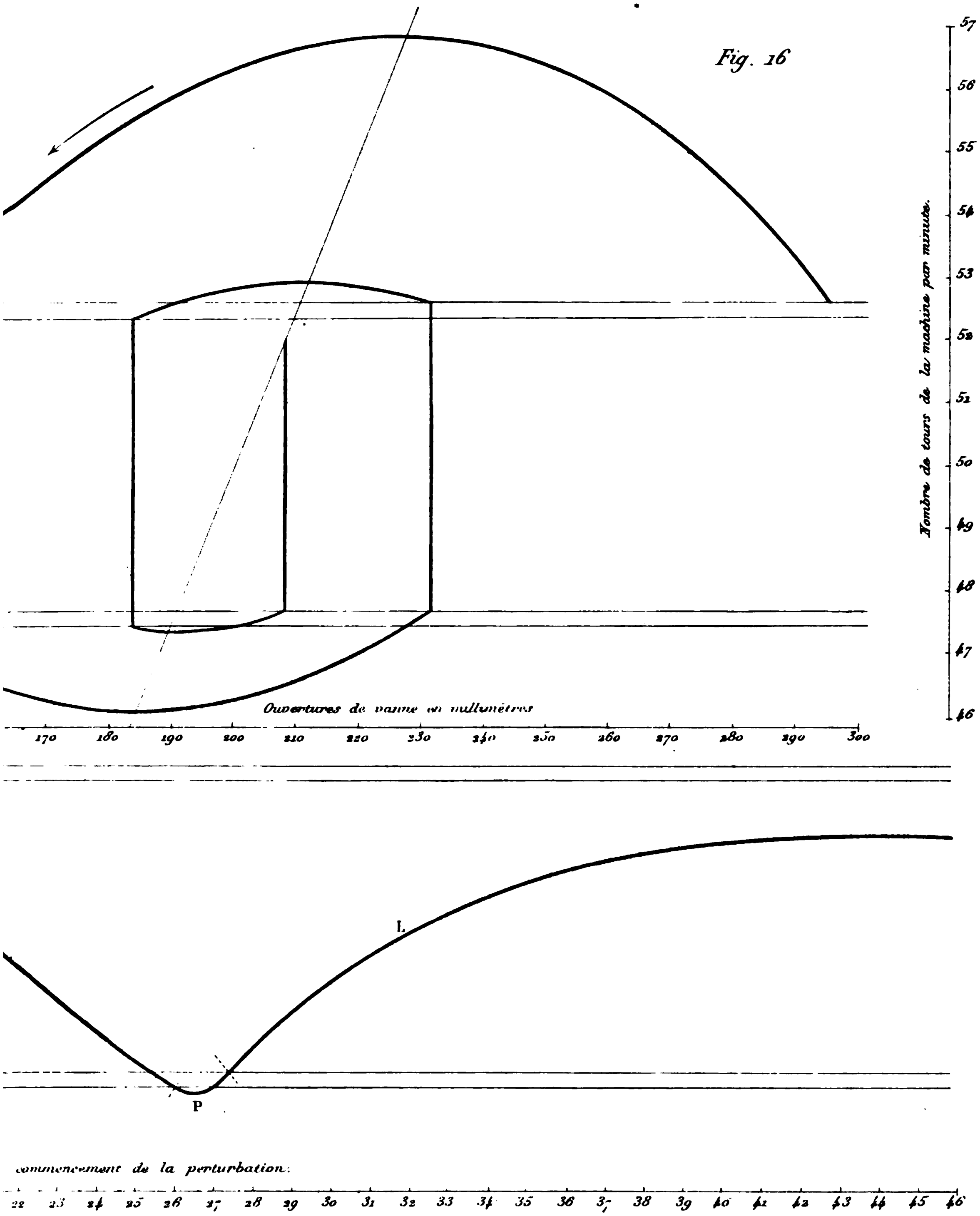


Fig. 17

Gravé par Mme Perrin. Paris

Gauthier-Villar

ONGUES PÉRIODES, PAR MR H. LÉAUTÉ.



Éditeur, Paris.

MÉMOIRE SUR LES OSCILLATIONS À

$\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{6}{100}$ *Échelle des vitesses, 10 m/m par tour.*

$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$ *Échelle des ouvertures de vanne, grandeur naturelle.*

$\frac{A}{\Upsilon} = \frac{8}{10}$ *Échelle des temps, 6 m/m 25 par minute.*

$\Omega = 50^t$ *Écart initial de la vanne, 85 m/m.*

$\mathfrak{R} = 200$ m/m

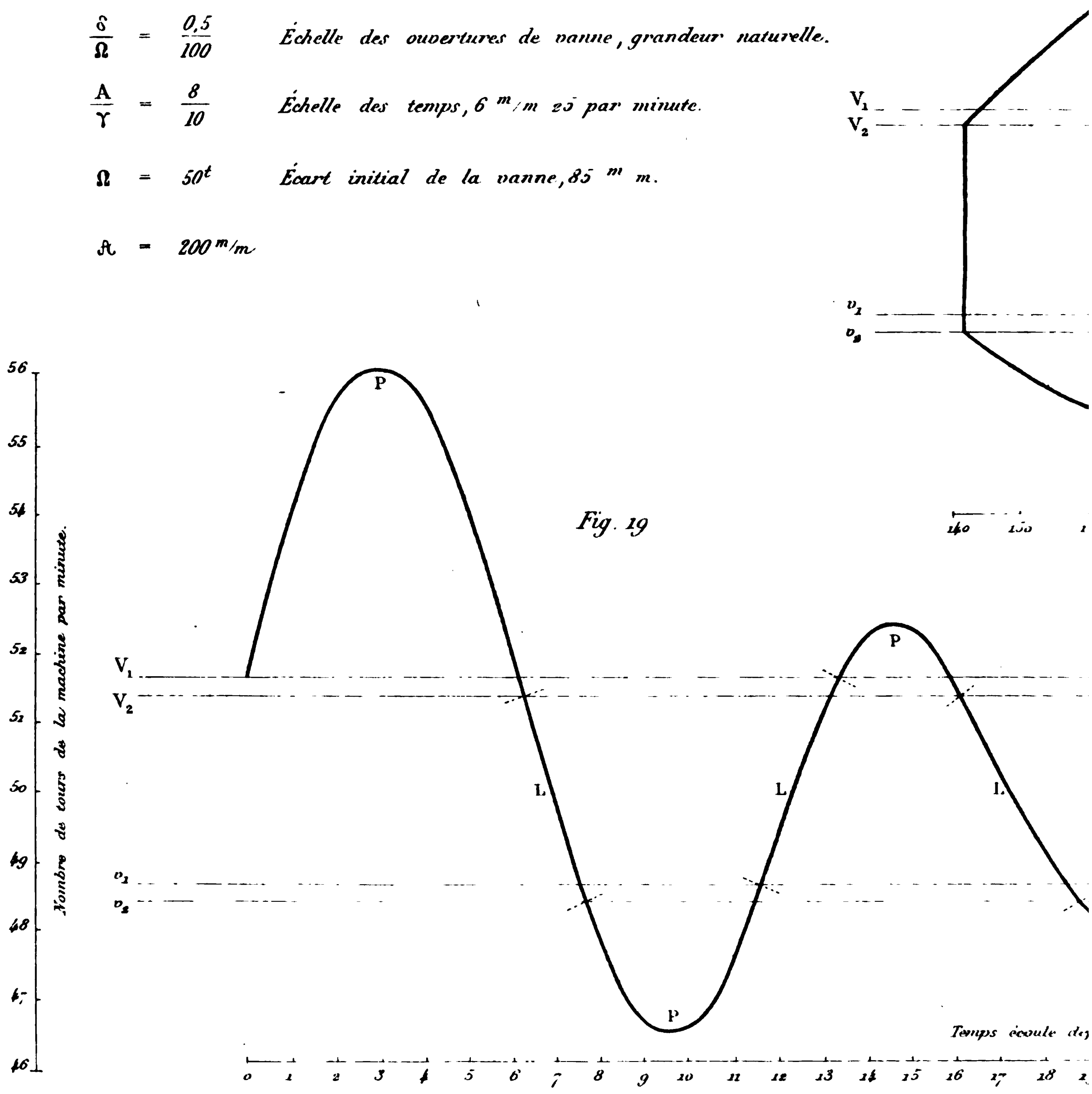
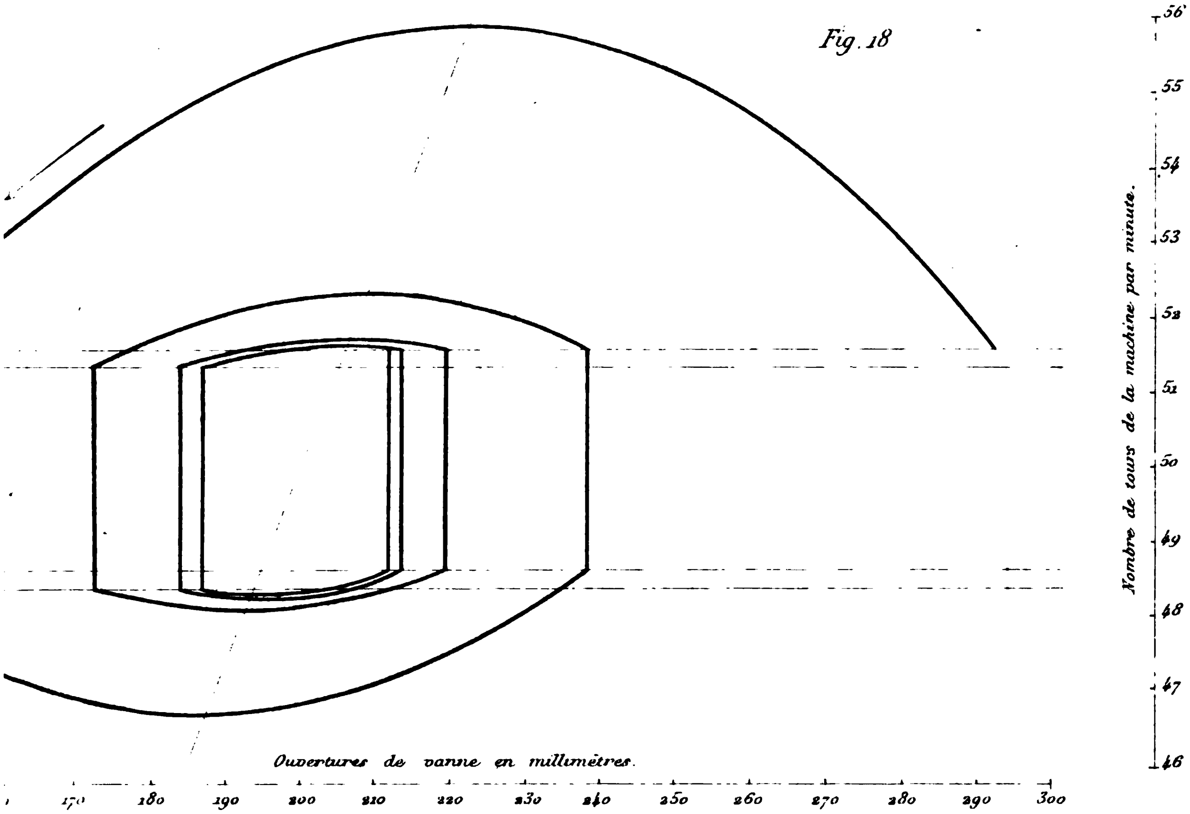


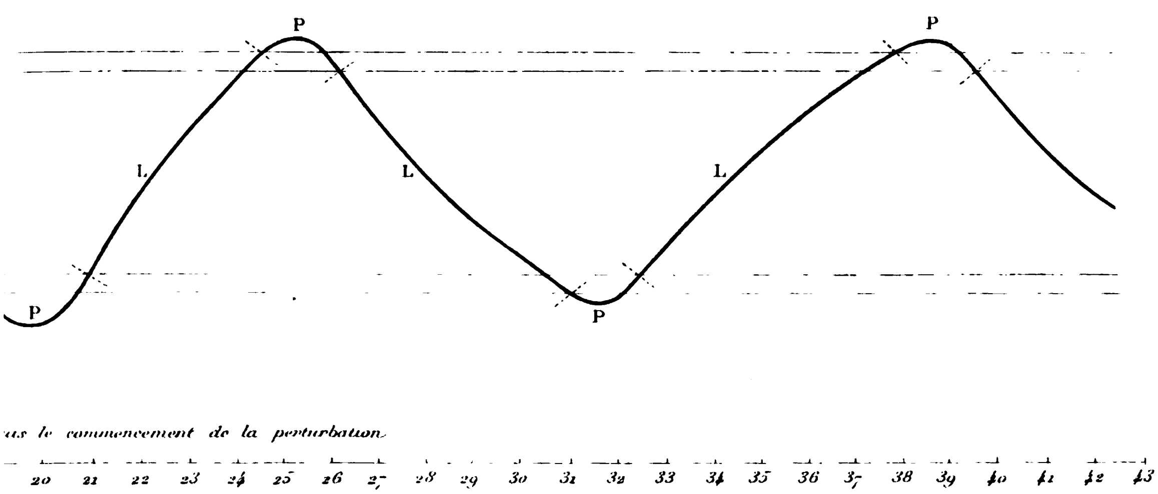
Fig. 19

Gravé par Mlle Perrin. Paris.

Gauthier-Villa

.ONGUES PÉRIODES , PAR Mr H. LÉAUTÉ.

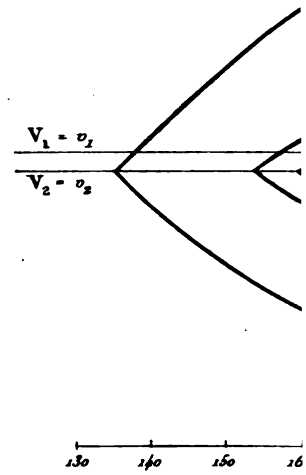




...s. Éditeur, Paris.

MÉMOIRE SUR LES OSCILLATIONS À L

$\frac{\Delta}{\Omega}$	=	0	*Échelle des vitesses, 10 m/m par tour.*
$\frac{\varepsilon}{\Omega}$	=	$\frac{0,5}{100}$	*Échelle des ouvertures de vanne, grandeur naturelle.*
$\frac{A}{\Upsilon}$	=	$\frac{8}{10}$	*Échelle des temps, 6 m/m 25 par minute.*
Ω	=	50^t	*Écart initial de la vanne, 85 m/m.*
$\mathfrak{R}$	=	200 m/m	



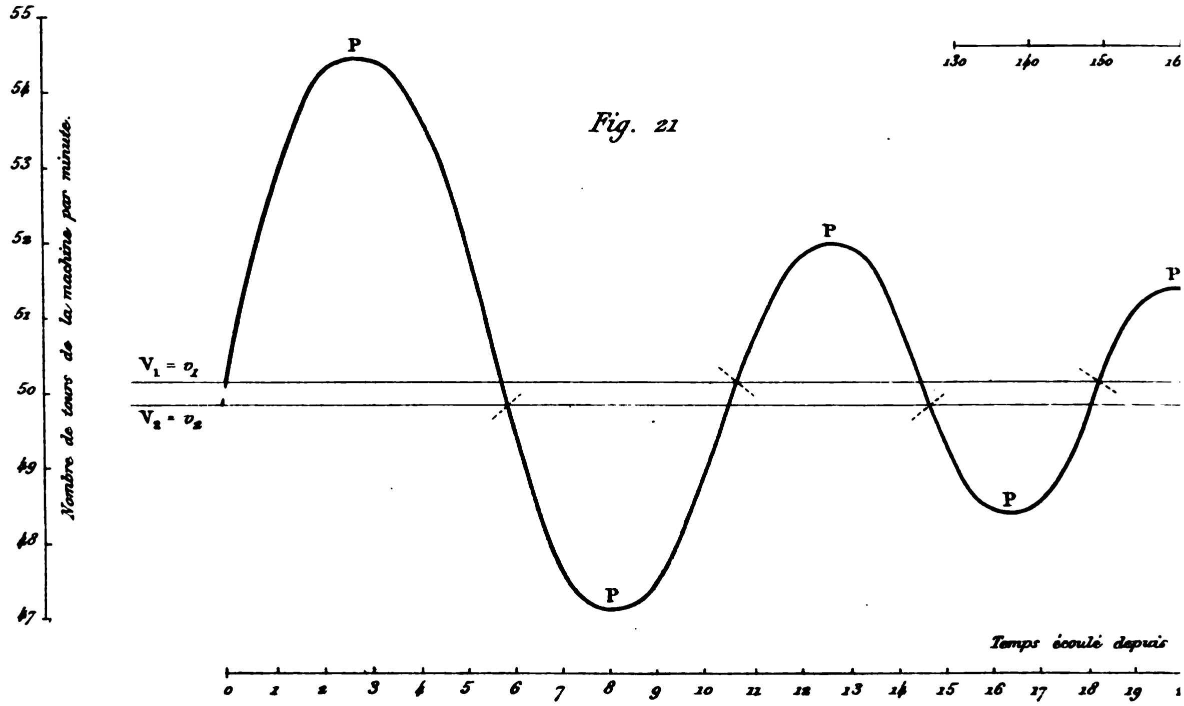


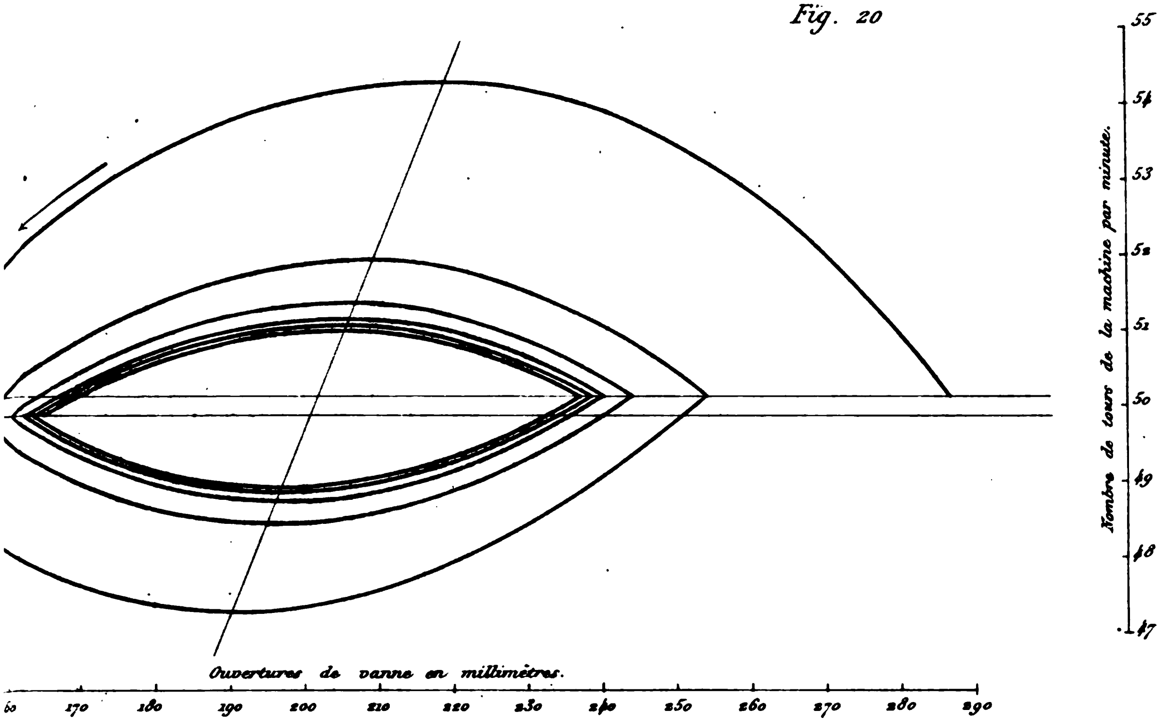
Fig. 21

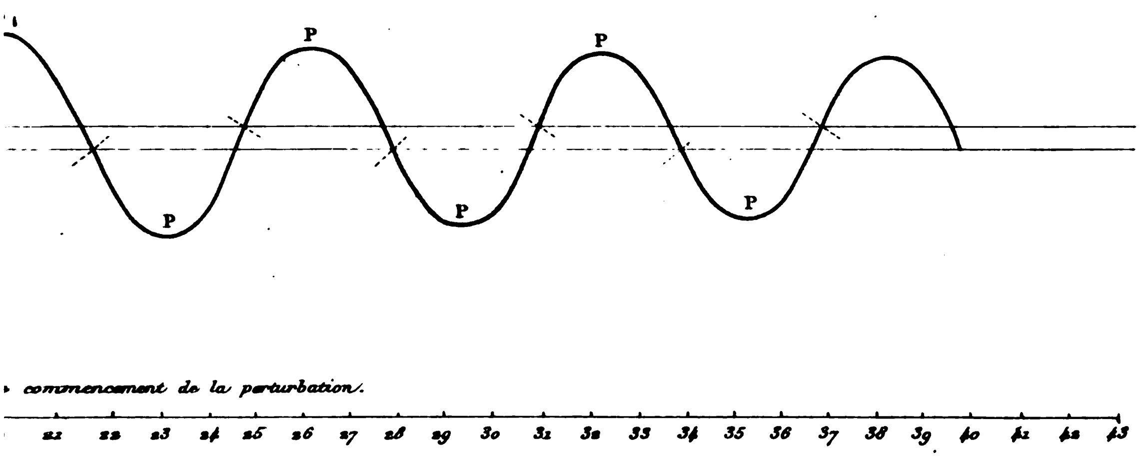
Gravé par M.me Perrin_ Paris.

Gauthier-Villars.

LONGUES PÉRIODES, PAR Mr H. LÉAUTÉ.

Fig. 20





Éditeur_ Paris.

MÉMOIRE SUR LES OSCILLATIONS À L

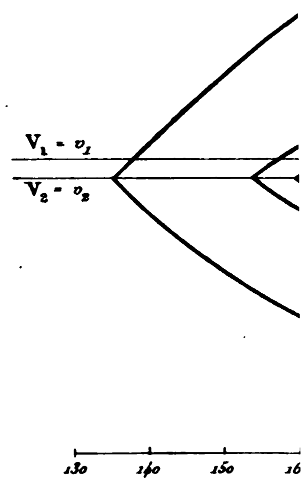
$\frac{\Delta}{\Omega} = 0$ — *Échelle des vitesses, 10 m/m par tour.*

$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{0,5}{100}$ — *Échelle des ouvertures de vanne, grandeur naturelle.*

$\frac{A}{\Upsilon} = \frac{8}{10}$ — *Échelle des temps, 6 m/m 25 par minute.*

$\Omega = 50^t$ — *Écart initial de la vanne, 85 m/m.*

$\mathfrak{A} = 200$ m/m



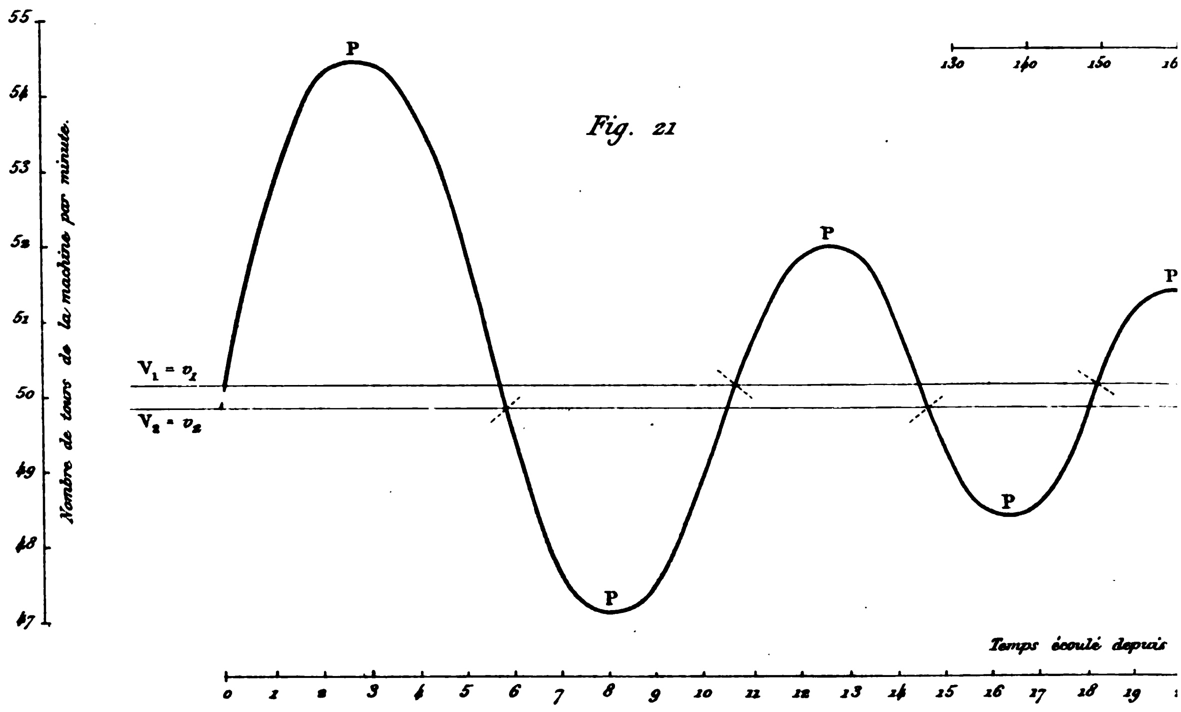
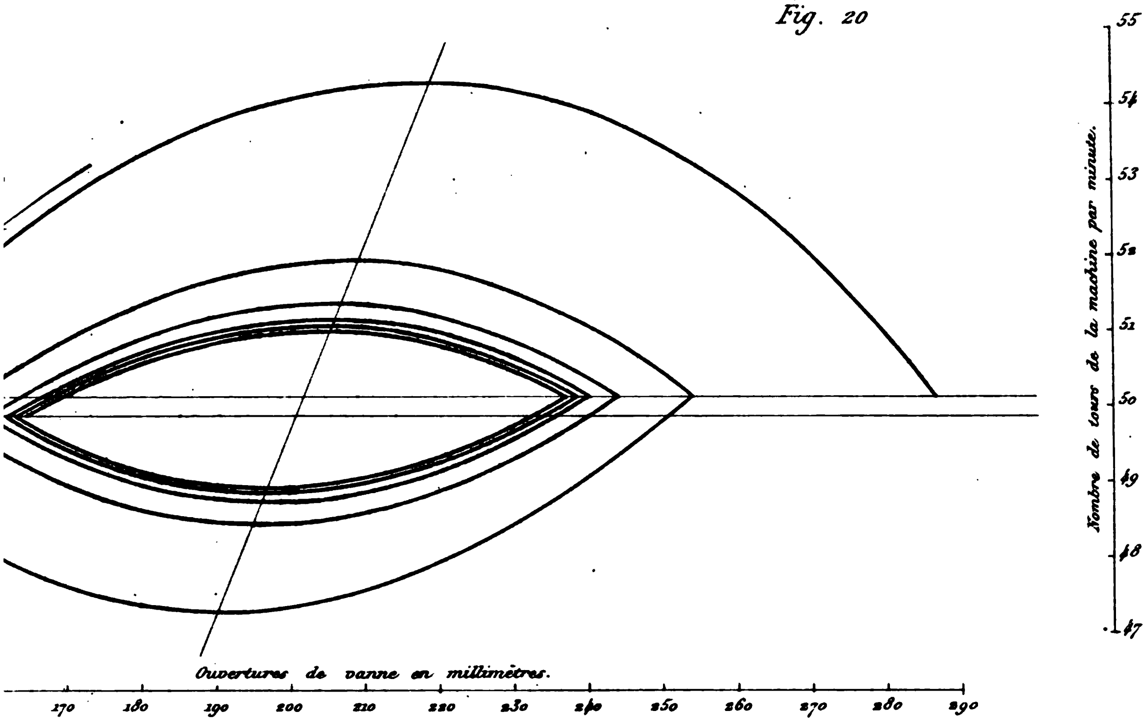
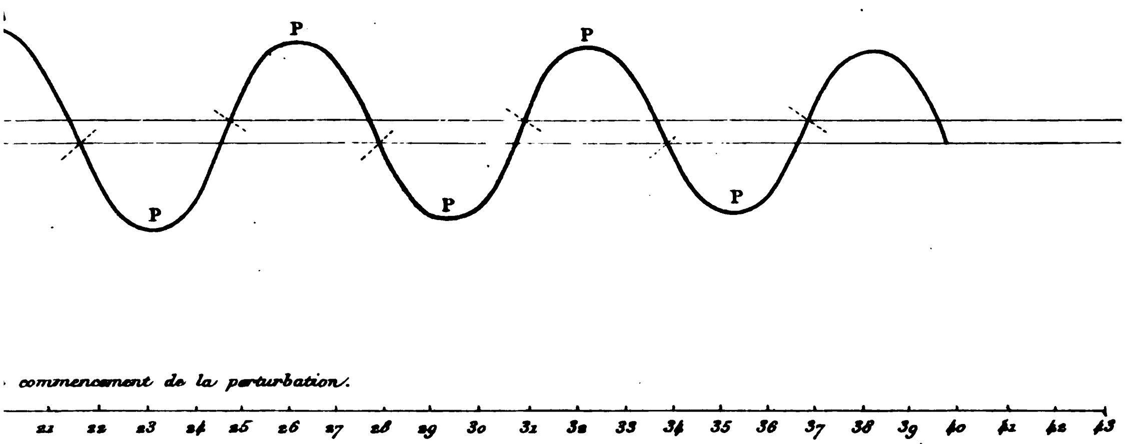


Fig. 21

NGUES PÉRIODES, PAR M.R H. LÉAUTÉ.

Fig. 20





Éditeur_ Paris.